РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ЛАБОРАТОРНЫ РАБОТЫ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

# Оглавление

# 1.1. Практическая работа 1

Решение дифференциальных уравнений первого порядка для последующего моделирования динамических систем:

- решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными;
- решение дифференциальных уравнений, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными;
- решение однородных дифференциальных уравнений.

# 1.2. Задание 1.1 – разделяющиеся переменные

**Задание 1.1**

$$y' = x^2 \sqrt[3]{y} \qquad (1.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (1.1.1) с разделяющимися переменными.

# 1.3. Задание 1.1 – дифференциалы, интегралы

Выразим производную через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt[3]{y}.$$

ДЕЛ

Умножим на $dx$ и разделим на $\sqrt[3]{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x^2 dx. \qquad (1.1.2)$$

ИНГ

Проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int x^2 dx + C. \qquad (1.1.3)$$

# 1.4. Задание 1.1 – таблица интегралов

Применим формулу из таблицы неопределенных интегралов к левой части

$$\int x^n dx = \frac{1}{1+n} x^{n+1} \qquad (1.1.4)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int y^{-1/3} dy = \frac{1}{-1/3+1} y^{-1/3+1} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}.$$

Применим формулу (1.1.4) к правой части уравнения (1.1.3)

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3 + C.$$

Подставляя полученные решения в (1.1.3), получаем решение

РЕШ

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^3 + \mathrm{C}. \qquad (1.1.5)$$

# 1.5. Задание 1.1 – окончательный результат

Так как (1.1.2) получено делением на $\sqrt[3]{y}$, проверим, является ли оно решением. Очевидно. что $y = 0$ является решением исходного уравнения и не входит в общее решение (1.1.5). Поэтому окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^3 + C;\ \mathrm{y} = 0.$$

# 1.6. Задание 1.2 – приведение к разделяющимся

**Задание 1.2**

$$y' = (x-y)^2 + 1 \qquad (1.2.1)$$

решить (1.2.1), приведя дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

# 1.7. Задание 1.2 – подстановка

ПДС

Сделаем подстановку

$$u = x - y. \qquad (1.2.2)$$

ДИФ

Дифференцируем по $x$, при чем $y$ есть функция от $x$

$$\frac{du}{dx} = (x - y)' = x' - y' = 1 - y'. \qquad (1.2.3)$$

ДОБ

Добавляем в (1.2.3) значение $y'$ из (1.2.1), получаем

$$\frac{du}{dx} = 1 - (x - y)^2 - 1 = -(x - y)^2 \qquad (1.2.4)$$

ЗАМ

Выполним замещение в (1.2.4), используя (1.2.2)

# 1.8. Задание 1.2 – интегрируем

$$\frac{du}{dx} = -(x-y)^2 = -u^2. \quad (1.2.5)$$

ДЕЛ

Разрешаем уравнение (1.2.5), умножаем на $dx$ и делим на $u^2$

$$\frac{du}{u^2} = -dx. \quad (1.2.6)$$

ИНГ

Интегрируем

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int dx + C. \quad (1.2.7)$$

Применим формулу (1.1.4) к левой части (1.2.7)

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -u^{-1} = -\frac{1}{u}. \quad (1.2.8)$$

# 1.9. Задание 1.2 – подставляем

Применим формулу из таблицы интегралов к правой части уравнения

$$\int dx = x \qquad (1.2.9)$$

$$-\int dx + C = -x + C. \qquad (1.2.10)$$

Подставим (1.2.8) и (1.2.10) в (1.2.7)

$$-\frac{1}{u} = -x + C,$$
$$u = \frac{1}{x - C}. \qquad (1.2.11)$$

Используя (1.2.11), найдем общее решение из подстановки (1.2.2)

РЕШ

$$u = x - y = \frac{1}{x - C},$$
$$y = x - \frac{1}{x - C}. \qquad (1.2.12)$$

# 1.10. Задание 1.2 – окончательный результат

Так как (1.2.6) получено делением на $u^2$ проверим, является ли оно решением. Запишеи $u = 0$ и подставим в 1.2.2

$$u = 0 = x - y,$$
$$y = x. \qquad (1.2.13)$$

Принимая во внимание (1.2.12) и (1.2.13), окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$y = x - \frac{1}{x - C};\ y = x.$$

# 1.11. Задание 1.3 – однородные уравнения

**Задание 1.3**

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2} \qquad (1.3.1)$$

решить однородной дифференциальное уравнение (1.3.1).

# 1.12. Задание 1.3 – проверка

Проверим, является ли уравнение однородным.
Заменяем $y \to ty, x \to tx$, при этом $y' \to y'$

$$txy' = ty + \sqrt{(ty)^2 - (tx)^2},$$
$$txy' = ty + t\sqrt{y^2 - x^2}. \quad (1.3.2)$$

Сокращаем (1.3.2) на $t$

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

ОДН

Так как $t$ сократилось, уравнение является однородным.
Делаем подстановку, где $u$ есть функция от $x$

ПДС

$$y = ux, \quad (1.3.3)$$
$$y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u. \quad (1.3.4)$$

# 1.13. Задание 1.3 – подстановка

Подставляем (1.3.3) и (1.3.4) в исходное уравнение (1.3.1)

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2},$$
$$x(u'x + u) = ux + \sqrt{(ux)^2 - x^2},$$
$$x^2u' + ux = ux + \sqrt{x^2(u^2 - 1)},$$
$$x^2u' = |x|\sqrt{(u^2 - 1)},$$
$$x^2u' = \pm x\sqrt{(u^2 - 1)},$$
$$xu' = \pm\sqrt{(u^2 - 1)}.$$

ДИФ

Дифференцируем по $x$, при чем $u$ есть функция от $x$

$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{(u^2 - 1)}. \qquad (1.3.5)$$

Разрешаем уравнение (1.3.5), умножаем на $\pm dx$ и делим на $x\sqrt{(u^2 - 1)}$

# 1.14. Задание 1.3 – интегрирование

ДЕЛ

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}}=\frac{dx}{x}. \qquad (1.3.6)$$

Проинтегрируем (1.3.6)

ИНГ

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}}=\int\frac{dx}{x}. \qquad (1.3.7)$$

Применим формулу из таблицы интегралов к левой части уравнения

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \qquad (1.3.8)$$

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u^2+1)}}=\pm\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|. \qquad (1.3.9)$$

Применим формулу из таблицы интегралов к правой части уравнения

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C. \qquad (1.3.10)$$

# 1.15. Задание 1.3 – вспомогательная формула

Подставим (1.3.9) и (1.3.10) в (1.3.7)

$$\pm\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|x| + C,$$
$$\pm\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|x| + \ln|C|,$$
$$\pm\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|Cx|. \qquad (1.3.11)$$

Применим вспомогательную формулу, тогда

$$\pm\ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right| = \ln\left|a\pm\sqrt{a^2-1}\right| \qquad (1.3.12)$$

$$\ln\left|u\pm\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|Cx|,$$
$$\left|u\pm\sqrt{u^2-1}\right| = Cx,$$
$$u\pm\sqrt{u^2-1} = Cx. \qquad (1.3.13)$$

Разрешаем уравнение (1.3.13), умножаем на $x$ и используем (1.3.3)

# 1.16. Задание 1.3 – возведение в квадрат

ЗАМ

$$ux \pm x\sqrt{u^2-1} = Cx^2,$$
$$y + |x|\sqrt{u^2-1} = Cx^2,$$
$$y + \sqrt{(ux)^2 - x^2} = Cx^2,$$
$$y + \sqrt{y^2-x^2} = Cx^2,$$
$$\sqrt{y^2-x^2} = Cx^2 - y.$$

Возводим в квадрат и получаем общее решение

РЕШ

$$y^2 - x^2 = (Cx^2 - y)^2,$$
$$y^2 - x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2,$$
$$-x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y,$$
$$2Cx^2y = C^2x^4 + x^2,$$
$$y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}. \quad (1.3.14)$$

Так как (1.3.6) получено делением на $x\sqrt{(u^2-1)}$ проверим, является ли оно решением. Запишеи $(u^2-1) = 0$ и подставим в 1.3.3

# 1.17. Задание 1.3 – окончательный результат

$$(u^2 - 1) \ = 0,$$
$$(\frac{x}{y})^2 = 1,$$
$$y = \pm x. \qquad (1.3.15)$$

Принимая во внимание (1.3.14) и (1.3.15), окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}; \ y = x; \ y = -x.$$

# 1.18. Задания для самоконтроля (1 из 2)

**Задание 1.4**

$$y' = -3y \qquad (1.4.1)$$

решить дифференциальное уравнение (1.4.1) с разделяющимися переменными.

**Задание 1.5**

$$y' = \frac{1}{ln(3x-y)} + 3 \qquad (1.5.1)$$

решить (1.5.1), приведя дифференциальное уравнение
к уравнению с разделяющимися переменными, используя

$$\int lnxdx = x(lnx - 1) + C.$$

# 1.18. Задания для самоконтроля (2 из 2)

**Задание 1.6**

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} \qquad (1.6.1)$$

решить однородной дифференциальное уравнение (1.6.1).

# 2.1. Практическая работа 2

Решение дифференциальных уравнений первого порядка для последующего моделирования динамических систем:

- решение дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к однородным;
- решение обобщенных однородных дифференциальных уравнений, первого порядка.
- решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Лагранжа.

# 2.2. Задание 2.1 – приводящееся к однородному

**Задание 2.1**

$$(2x - y + 4)y' + x - 2y + 5 = 0 \qquad (2.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (2.1.1), приводящегося к однородному уравнению первого порядка.

# 2.3. Задание 2.1 – проверка на однородность

Проверим, является ли (2.1.1) однородным. Выделим две линейные формы

$$2x - y + 4, \qquad (2.1.2а)$$
$$x - 2y + 5. \qquad (2.1.2б)$$

Заменим (2.1.2) с использованием $t$

$$2x - y + 4 \to t(2x - y + 4), \qquad (2.1.3а)$$
$$x - 2y + 5 \to t(x - 2y + 5), \qquad (2.1.3б)$$

Подставим (2.1.3) в (2.1.1) и заменим $y' = \frac{dy}{dt}$

$$t(2x - y + 4)\frac{dy}{dt} + t(x - 2y + 5) = 0. \qquad (2.1.4)$$

Делим на $t$

# 2.4. Задание 2.1 – система

$$(2x - y + 4)\frac{dy}{dt} + (x - 2y + 5) = 0. \tag{2.1.5}$$

ОДН

Так как $t$ сократилось, значит уравнение однородное, решаем систему

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Подставляем первое уравнение из (2.1.6) во второе

$$y = 2x + 4,$$
$$x - 2(2x + 4) + 5 = 0,$$
$$x - 4x - 8 + 5 = 0,$$
$$-3x = 3,$$
$$x = -1,$$

Подставляем полученное решение в первое уравнение (2.1.6)

# 2.5. Задание 2.1 – подстановка

$$y = 2x + 4, x = -1,$$
$$y = -2 + 4 = 2,$$
$$y = 2.$$

Имеем решение системы (2.1.6)

РЕШ

$$x_0 = -1, y_0 = 2.$$

Делаем подстановку, где $u$ зависит от $t$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}$

ПДС

$$x = t + x_0 = t - 1, \quad (2.1.7а)$$
$$y = u + y_0 = u + 2. \quad (2.1.7б)$$

Подставляем (2.1.7) в уравнения из (2.1.6)

$$2x - y + 4 = 2(t - 1) - (u + 2) + 4 = 2t - u, \quad (2.1.8а)$$

# 2.6. Задание 2.1 – замещение

$$x - 2y + 5 = t - 1 - 2(u + 2) + 5 = t - 2u. \quad (2.1.8б)$$

Подставляем (2.1.8) в (2.1.1)

$$(2t - u)\frac{du}{dt} + t - 2u = 0. \quad (2.1.9)$$

ЗАМ

Уравнение (2.1.9) является однородным,
для его решения делаем замещение

$u = zt, z$ есть функция от $t$, (2.1.10а)

$$u' = (zt)' = z't + zt' = z't + z. \quad (2.1.10б)$$

Подставляем (2.1.10б) в (2.1.9)

$$(2t - zt)(z't + z) + t - 2zt = 0. \quad (2.1.11)$$

# 2.7. Задание 2.1 – интегрируем

Сокращаем в (2.1.11) $t$ и делаем преобразование

$$(2-z)(z't+z)+1-2z=0,$$
$$(2-z)z't+2z-z^2+1-2z=0,$$
$$(2-z)t\frac{dz}{dt}=z^2-1.$$

ДЕЛ

Умножаем на $dt$ и делим на $t(z^2-1)$

$$\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\frac{dt}{t}. \qquad (2.1.12)$$

ИНГ

Интегрируем (2.1.12)

$$\int\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\int\frac{dt}{t}+C. \qquad (2.1.13)$$

# 2.8. Задание 2.1 – проверка на однородность

Применим таблицу интегралов (1.3.10) для поиска правой части (2.1.13)

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C. \qquad (2.1.14)$$

Используем таблицу интегралов (1.3.10) для левой части (2.1.13), а также

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

и свойство внесения значения в дифференциал

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{x}$$

$$\int \frac{(2-z)dz}{z^2-1} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} - \int \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{2}{2} \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(z^2-1\right)}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2} \ln\left|(z^2 - 1)\right| \qquad (2.1.15)$$

Подставляя (2.1.14) и (2.1.15) в (2.1.13), имеем

# 2.9. Задание 2.1 – переменные

$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\ln|(z^2-1)| = \ln|t| + C,$$
$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\ln|(z^2-1)| = \ln|t| + \ln|C|,$$
$$2\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \ln|(z^2-1)| = 2\ln|Ct|,$$
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = |(z^2-1)|Ct^2.$$

Умножим на $(z+1)^2$ и применим $(z^2-1) = (z-1)\,(z+1)$

$$(z-1)^2 = (z+1)^2\,(z-1)\,(z+1)Ct^2,$$
$$z-1 = (z+1)^3Ct^2. \qquad (2.1.16)$$

Возвращаемся к переменным $u$ и $t$, используя (2.1.10а), умножим (2.1.16) на $t$

$$u = zt,$$
$$(z-1)t = (z+1)^3Ct^3,$$
$$zt - t = C(zt+t)^3,$$

# 2.10. Задание 2.1 – решение

$$u - t = C(u + t)^3. \qquad (2.1.17)$$

Возвращаемся к переменным $x$ и $y$, используя (2.1.7), найдем общее решение

РЕШ

$$x = t - 1, \text{ т.е. } t = x + 1, \qquad (2.1.18а)$$
$$y = u + 2, \text{ т.е. } u = y - 2, \qquad (2.1.18б)$$
$$y - 2 - (x + 1) = C(y - 2 + x + 1)^3,$$
$$y - x - 3 = C(y + x - 1)^3. \qquad (2.1.18в)$$

Так как (2.1.12) получено делением на $t(z^2 - 1)$ проверим, является ли оно решением. Запишем $z^2 = 1$ и подставим $z = \pm 1$ в (2.1.10а), используя (2.1.18а) и (2.1.18б)

$$u = zt,$$
$$z = \frac{u}{t} = \frac{y-2}{x+1} = \pm 1,$$
$$y - 2 = \pm x \pm 1. \qquad (2.1.19)$$

# 2.11. Задание 2.1 – общее решение

Для верхнего знака «+» из (2.1.19) имеем

$$y - 2 = x + 1,$$
$$y - x - 3 = 0. \qquad (2.1.20)$$

Общее решение (2.1.18в) учитывает (2.1.20) при *C=0*.
Для нижнего знака «-» из (2.1.19) имеем

$$y - 2 = -x - 1,$$
$$y + x - 1 = 0. \qquad (2.1.21)$$

Общее решение (2.1.18в) не учитывает (2.1.21).
Поэтому общее решение запишется в виде

ОБЩРЕШ

$$y - x - 3 = C(y + x - 1)^3; \; y + x - 1 = 0.$$

# 2.13. Задание 2.2 – обобщенное

**Задание 2.2**

$$(1 - xy)xy' + y(1 + xy) = 0 \qquad (2.2.1)$$

решить обобщенное однородное дифференциальное уравнение
первого порядка (2.2.1).

# 2.14. Задание 2.2 – проверка на однородность

Проверим, является ли (2.2.1) однородным обобщенным.
Делаем замену

$$y \to t^{\alpha} y,\ x \to tx,\ y' \to t^{\alpha-1} y'. \tag{2.2.2}$$

Подставляем (2.2.2) в (2.2.1)

ОДН

$$(1 - txt^{\alpha} y) txt^{\alpha-1} y' + t^{\alpha} y (1 + txt^{\alpha} y) = 0,$$
$$(1 - xyt^{\alpha+1}) xy' t^{\alpha} + t^{\alpha} y (1 + xyt^{\alpha+1}) = 0. \tag{2.2.3}$$

Разделим (2.2.3) на $t^{\alpha}, t$ сократится, если $\alpha = -1$. Значит это обобщенное однородное уравнение. Используем $\alpha$ для подстановки

ПДС

$$y = zx^{\alpha} = zx^{-1},\ \text{где } z \text{ есть функция от } x \tag{2.2.4}$$

Берем производную от (2.2.4), используя $(x^{a})' = ax^{a-1}$

# 2.15. Задание 2.2 – подстановка

$$y' = (zx^{-1})' = z'x^{-1} + z(x^{-1})' = z'x^{-1} - zx^{-2}. \qquad (2.2.5)$$

Подставляем (2.2.4) и (2.2.5) в исходное уравнение (2.2.1)

ЗАМ

$$(1 - xy)xy' + y(1 + xy) = 0,$$
$$(1 - xzx^{-1})x(z'x^{-1} - zx^{-2}) + zx^{-1}(1 + xzx^{-1}) = 0,$$
$$(1 - z)(z' - zx^{-1}) + zx^{-1}(1 + z) = 0.$$

Умножим на $x$ и раскрываем скобки

$$(1 - z)(xz' - z) + z\,(1 + z) = 0,$$
$$(1 - z)xz' - z + z^2 + z + z^2 = 0,$$
$$(z - 1)x\frac{dz}{dx} = 2z^2. \qquad (2.2.6)$$

# 2.16. Задание 2.2 – интеграл

ДЕЛ

Умножаем (2.2.6) на $dx$ и делим на $xz^2$ имеем

$$\frac{(z-1)dz}{z^2} = 2\frac{dx}{x}. \qquad (2.2.7)$$

ИНГ

Интегрируем уравнение (2.2.7)

$$\int \frac{(z-1)dz}{z^2} = 2\int \frac{dx}{x}. \qquad (2.2.8)$$

Преобразуем правую часть интеграла (2.2.8), используя (1.3.10)

$$2\int \frac{dx}{dx} = 2\ln|x| = lnx^2. \qquad (2.2.9)$$

Преобразуем левую часть интеграла (2.2.8), используя (1.3.10) и (1.1.4)

# 2.17. Задание 2.2 – подставление

$$\int \frac{(z-1)dz}{z^2} = \int \frac{dz}{z} - \int z^{-2}dz = \ln|z| - \frac{1}{-2+1} z^{-2+1} = \ln|z| + \frac{1}{z}. \quad (2.2.10)$$

Подставляем (2.2.9) и (2.2.10) в уравнение (2.2.8)

$$\ln|z| + \frac{1}{z} = lnx^2 + C,$$

$$\ln|z| + \frac{1}{z} = lnCx^2,$$

$$|z|e^{\frac{1}{z}} = Cx^2. \quad (2.2.11)$$

Подставляем в (2.2.11) значение (2.2.4), находим решение

РЕШ

$$z = xy,$$

$$xye^{\frac{1}{xy}} = Cx^2,$$

$$ye^{\frac{1}{xy}} = Cx. \quad (2.2.12)$$

# 2.18. Задание 2.2 – решение

Так как (2.2.12) получено делением на $xz^2$ в (2.2.7) проверим, является ли оно решением. Запишем $z^2 = 0$ и подставим $z = 0$ в (2.2.4)

$$z = xy = 0,$$
$$y = 0. \qquad (2.2.13)$$

Общее решение (2.2.12) не учитывает (2.2.13).
Поэтому общее решение запишется в виде

ОБЩРЕШ

$$ye^{\frac{1}{xy}} = Cx; \; y = 0.$$

# 2.20. Задание 2.3 – Лагранж

**Задание 2.3**

$$xy' + 3y = x^2 \qquad (2.3.1)$$

решить линейное дифференциальное уравнение
первого порядка (2.3.1) методом Лагранжа.

# 2.21. Задание 2.3 – однородное

Решаем однородное уравнение

$$xy' + 3y = 0. \qquad (2.3.2)$$

Добавляем дифференциал в (2.3.2)

ДЕЛ

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 0. \qquad (2.3.3)$$

Умножаем на $dx$ и делим на $xy$ уравнение (2.3.3)

$$\frac{dy}{y} + 3\frac{dx}{x} = 0. \qquad (2.3.4)$$

ИНГ

Интегрируем (2.3.4)

# 2.22. Задание 2.3 – замена $C$

$$\int \frac{dy}{y} + 3\int \frac{dx}{x} = 0. \qquad (2.3.5)$$

Используя табличные интегралы (1.3.10) получаем

РЕШ

$$\ln|y| + 3\ln|x| = C,$$
$$|y| + |x|^3 = e^C,$$
$$yx^3 = C,$$
$$y = \frac{C}{x^3}. \qquad (2.3.6)$$

Заменим $C$ на функцию от $x$, $C \to u(x)$ и подставим в (2.3.6)

ПДС

$$y = \frac{u}{x^3}. \qquad (2.3.7)$$

Найдем производную от (2.3.7), используя

$$(x^a)' = ax^{a-1}\ . \qquad (2.3.8)$$

# 2.23. Задание 2.3 – интеграл

$$y' = \left(u\frac{1}{x^3}\right)' = u'\frac{1}{x^3} + u(x^{-3})' = \frac{u'}{x^3} - u3x^{-4} = \frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^4}. \qquad (2.3.9)$$

Подставляем (2.3.7) и (2.3.9) в исходное уравнение (2.3.1)

ЗАМ

$$xy' + 3y = x^2, y = \frac{u}{x^3},$$

$$x\left(\frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^{-4}}\right) + \frac{3u}{x^3} = x^2,$$

$$\frac{u'}{x^2} = x^2,$$

$$u' = x^4,$$

$$\frac{du}{dx} = x^4. \qquad (2.3.10)$$

Интегрируем (2.3.10), используя (1.1.4)

# 2.24. Задание 2.3 – решение

$$u = \int x^4 dx + C = \frac{1}{5}x^5 + C. \qquad (2.3.11)$$

Получаем общее решение, подставляя в (2.3.7) данные (2.3.11)

ОБЩРЕШ

$$y = \frac{u}{x^3},$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right),$$

$$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{C}{x^3}.$$

# 2.25. Задания для самоконтроля (1 из 2)

**Задание 2.4**

$$(x + 2y + 1)y' + x + y - 2 = 0 \qquad (2.4.1)$$

решить дифференциальное уравнение первого порядка (2.4.1), приводящиеся к однородному.

**Задание 2.5**

$$(xy - 2)xy' + y = 0 \qquad (2.5.1)$$

решить обобщенное однородное дифференциальное уравнение первого порядка (2.5.1).

# 2.26. Задания для самоконтроля (2 из 2)

**Задание 2.6**

$$y' - (x-1)y = x \qquad (2.6.1)$$

решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка методом Лагранжа (2.6.1).

# 3.1. Практическая работа 3

Решение дифференциальных уравнений первого порядка на основе численных методов:

- решение дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Эйлера *k*-го порядка;
- решение обобщенных однородных дифференциальных уравнений с использованием метода Рунге-Кутта *4*-го порядка;
- решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Штермера.

**Задание 3.1**

$$y' = x + y^2,\ 0 \le x \le 1,\ y_0 = y(0) = 0.3,\ k = 2,\ h = 0.2 \qquad (3.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.1.1)
методом Эйлера 2-го порядка с 3-я знаками после запятой.

# 3.3. Задание 3.1 – формула

Запишем общую формулу Эйлера

$$y' = x + y^2$$

$$y_{l+1} = y_l + h\dot{y}_l + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_l,$$

$$y_{l+1} = y_l + hf(x_l, y_l) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_l,y_l)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_l,y_l)}{\partial y} \cdot f(x_l, y_l)\right),$$

$$y_{l+1} = y_l + h(x_l + {y_l}^2) + \frac{h^2}{2}(1 + 2y_l(x_l + {y_l}^2)),$$

$$y_{l+1} = y_l + 0.2(0.2l + {y_l}^2) + 0.02(1 + 0.4ly_l + 2{y_l}^3)), \qquad (3.1.2)$$

при $x_l = x_0 + hl = 0 + 0.2l = 0.2l,\ \ l = 0,1,2,\dots,4.$

Полагая последовательно $l = 0,1,2,\dots,4$ в (3.1.2), получаем

$$y_1 = 0.3 + 0.2 \cdot 0.09 + 0.02(1 + 0.054) = 0.339,$$

$$y_2 = 0.339 + 0.2(0.2 + (0.339)^2) + 0.02(1 + 0.4 \cdot 0.339 + 2 \cdot (0.339)^3)) = 0.426,$$

# 3.4. Задание 3.1 – решение

$$y_3 = 0.426 + 0.2(0.4 + (0.426)^2) + 0.02\big(1 + 0.8 \cdot 0.426 + 2 \cdot (0.426)^3\big) = 0.572,$$
$$y_4 = 0.572 + 0.2(0.6 + (0.572)^2) + 0.02\big(1 + 1.2 \cdot 0.572 + 2 \cdot (0.572)^3\big) = 0.799,$$
$$y_5 = 0.799 + 0.2(0.8 + (0.799)^2) + 0.02\big(1 + 1.6 \cdot 0.799 + 2 \cdot (0.799)^3\big) = 1.153.$$

При значениях $x_l = 0.2l,\ \ l = 0,2, \dots, 4$

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.2,$$
$$x_3 = 0.4,$$
$$x_4 = 0.5,$$
$$x_5 = 0.8.$$

# 3.5. Задание 3.2 – Рунге-Кутт 4-го порядка

**Задание 3.2**

$$y' = y^2 - x,\ 0 \le x \le 0.5,\ y_0 = y(0) = 0.5,\ h = 0.1 \qquad (3.2.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.2.1)
методом Рунге-Кутта 4-го порядка с 3-я знаками после запятой.

# 3.6. Задание 3.2 – формула

Запишем формулу Рунге-Кутта 4-го порядка

$$k_{i1} = f_i(x_l, y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{ml}),$$

$$k_{i2} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{11}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{21}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l1}}{2}\right),$$

$$k_{i3} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{12}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{22}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l2}}{2}\right),$$

$$k_{i1} = f_i(x_l + h, y_{1l} + hk_{13}, y_{2l} + hk_{23}, \dots, y_{ml} + hk_{l3}).$$

Тогда приближенные значения находятся по формуле

$$y_{i,\,l+1} = y_{i,\,l} + \frac{h}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}), \tag{3.2.2а}$$

$$x_l = hl. \tag{3.2.2б}$$

# 3.7. Задание 3.2 – решение

Используя (3.2.2), находим

$$y' = y^2 - x,$$
$$k_{1l} = {y_l}^2 - x_l,$$
$$k_{2l} = (y_l + 0.05k_{1l})^2 - x_l - 0.05,$$
$$k_{3l} = (y_l + 0.05k_{2l})^2 - x_l - 0.05,$$
$$k_{4l} = (y_l + 0.1k_{3l})^2 - x_l - 0.1,$$
$$y_{l+1} = y_l + \frac{0.1}{6}(k_{1l} + 2k_{2l} + 2k_{3l} + k_{4l}),$$
$$x_l = 0.1l, y_0 = y(0) = 0.5, l = 0,1,2, \dots, 4.$$

Полагая последовательно $l = 0,1,2, \dots, 4$ в (3.1.2) получаем

$$k_{10} = 0.5^2 - 0 = 0.25,$$
$$k_{20} = (0.5 + 0.05 \cdot 0.25)^2 - 0 - 0.05 = 0.212,$$
$$k_{30} = (0.5 + 0.05 \cdot 0.212)^2 - 0 - 0.05 = 0.210,$$
$$k_{40} = (0.5 + 0.1 \cdot 0.210)^2 - 0 - 0.1 = 0.171,$$

# 3.8. Задание 3.2 – решение

$$y_1 = 0.5 + \frac{0.1}{6}(0.25 + 2 \cdot 0.212 + 2 \cdot 0.210 + 0.171) = 0.521,$$
$$x_0 = 0,\ l = 0.$$

$$k_{11} = 0.521^2 - 0.1 = 0.171,$$
$$k_{21} = (0.521 + 0.05 \cdot 0.171)^2 - 0.1 - 0.05 = 0.131,$$
$$k_{31} = (0.521 + 0.05 \cdot 0.131)^2 - 0.1 - 0.05 = 0.129,$$
$$k_{41} = (0.521 + 0.1 \cdot 0.129)^2 - 0.1 - 0.1 = 0.085,$$
$$y_2 = 0.521 + \frac{0.1}{6}(0.171 + 2 \cdot 0.131 + 2 \cdot 0.129 + 0.085) = 0.534,$$
$$x_1 = 0.1,\ l = 1.$$

$$k_{12} = 0.534^2 - 0.2 = 0.085,$$
$$k_{22} = (0.534 + 0.05 \cdot 0.085)^2 - 0.2 - 0.05 = 0.039,$$
$$k_{32} = (0.534 + 0.05 \cdot 0.039)^2 - 0.2 - 0.05 = 0.037,$$
$$k_{42} = (0.534 + 0.1 \cdot 0.037)^2 - 0.2 - 0.1 = -0.011,$$
$$y_3 = 0.534 + \frac{0.1}{6}(0.085 + 2 \cdot 0.039 + 2 \cdot 0.037 - 0.011) = 0.538,$$
$$x_2 = 0.2,\ l = 2.$$

# 3.9. Задание 3.2 – решение

$$k_{13} = 0.538^2 - 0.3 = -0.011,$$
$$k_{23} = (0.538 - 0.05 \cdot 0.011)^2 - 0.3 - 0.05 = -0.061$$
$$k_{33} = (0.5381 - 0.05 \cdot 0.061)^2 - 0.3 - 0.05 = -0.064,$$
$$k_{43} = (0.538 - 0.1 \cdot 0.064)^2 - 0.3 - 0.1 = -0.011,$$
$$y_4 = 0.538 - \frac{0.1}{6}(0.011 + 2 \cdot 0.061 + 2 \cdot 0.064 + 0.011) = 0.532,$$
$$x_3 = 0.3,\ l = 3.$$

$$k_{12} = 0.532^2 - 0.4 = -0.117,$$
$$k_{22} = (0.532 - 0.05 \cdot 0.117)^2 - 0.4 - 0.05 = -0.173,$$
$$k_{32} = (0.532 - 0.05 \cdot 0.173)^2 - 0.4 - 0.05 = -0.175,$$
$$k_{42} = (0.532 - 0.1 \cdot 0.175)^2 - 0.4 - 0.1 = -0.235,$$
$$y_5 = 0.532 - \frac{0.1}{6}(0.117 + 2 \cdot 0.173 + 2 \cdot 0.175 - 0.235) = 0.515,$$
$$x_4 = 0.4,\ l = 4.$$

# 3.10. Задание 3.3 – Штермер

**Задание 3.3**

$$y' = y,\ 0 \le x \le 0.5,\ y_0 = y(0) = 1,\ h = 0.1 \qquad (3.3.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.3.1)
методом Штермера с 3-я знаками после запятой.

# 3.11. Задание 3.3 – формула

Запишем формулу Штермера

$$y_{i,\,l+1} = y_{i,\,l} + q_{i,\,l} + \frac{1}{2}\Delta\, q_{i,\,l-1},$$
$$\Delta\, q_{i,\,l-1} = q_{i,\,l} - q_{i,\,l-1}.$$

Тогда

$$y_{l+1} = y_l + q_l + \frac{1}{2}\Delta\, q_{l-1},$$
$$y_{l+1} = y_l + hy_l{}' + \frac{h}{2}(y_l' - y'{}_{l-1}),$$
$$y_{l+1} = y_l + hy_l + \frac{h}{2}(y_l - y_{l-1}),$$
$$y_{l+1} = 1.15y_l - 0.05y_{l-1}.$$

Для поиска $y_1$ применим метод Рунге-Кутта 4-го порядка

# 3.12. Задание 3.3 – решение

$$k_1 = y_0 = 1,$$
$$k_2 = y_0 + \frac{h}{2} k_1 = 1.05,$$
$$k_3 = y_0 + \frac{h}{2} k_2 = 1.052,$$
$$k_4 = y_0 + h k_3 = 1.105,$$
$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.105.$$

Тогда

$$y_2 = 1.15y_1 - 0.05y_0 = 1.15 \cdot 1.105 - 0.05 \cdot 1 = 1.221,$$
$$y_3 = 1.15y_2 - 0.05y_1 = 1.15 \cdot 1.121 - 0.05 \cdot 1.105 = 1.349,$$
$$y_4 = 1.15y_3 - 0.05y_2 = 1.15 \cdot 1.349 - 0.05 \cdot 1.221 = 1.490,$$
$$y_5 = 1.15y_4 - 0.05y_3 = 1.15 \cdot 1.490 - 0.05 \cdot 1.349 = 1.649.$$

А также

# 3.13. Задание 3.3 – решение

$$x_{l+1} = hl = 0.1l,\ l = 0,1,2,\dots,4,$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.1,$$
$$x_3 = 0.2,$$
$$x_4 = 0.3,$$
$$x_5 = 0.4.$$

# 3.14. Задания для самоконтроля (1 из 2)

**Задание 3.1**

$$x' = t + 2x - y, \qquad y' = 1 - x + 2y, \tag{3.4.1}$$
$$0 \le t \le 0.5, \qquad x(0) = y(0) = 0, \qquad k = 2, \qquad h = 0.1$$

решить дифференциальное уравнение (3.4.1)
методом Эйлера 2-го порядка с 3-я знаками после запятой.

**Задание 3.2**

$$y' = x^2 - y^2,\ 1 \le x \le 2,\ y_0 = y(1) = 1,\ h = 0.2 \tag{3.5.1}$$

решить дифференциальное уравнение (3.5.1)
методом Рунге-Кутта 4-го порядка с 3-я знаками после запятой.

# 3.15. Задания для самоконтроля (2 из 2)

**Задание 3.3**

$$y' = \frac{x^2}{x+y}, \tag{3.6.1}$$

$$1 \le x \le 1.5, \qquad y(1) = 0, \qquad h = 0.1$$

решить дифференциальное уравнение (3.6.1)
методом Штермера с 3-я знаками после запятой.

# 4.1. Практическая работа 4

Решение дифференциальных уравнений высшего порядка для последующего моделирования динамических систем :

- решение дифференциальных уравнений высшего порядка непосредственным интегрированием;
- решение дифференциальных уравнений высшего порядка не содержащих в явном виде $y$;
- решение дифференциальных уравнений высшего порядка не содержащих в явном виде $x$.

# 4.2. Задание 4.1 – интегрированием

**Задание 4.1**

$$y'''sin^4x = sin2x \qquad (4.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.1.1) непосредственным интегрированием.

# 4.3. Задание 4.1 – преобразование

Применим формулу тригонометрии

$$sin2a = 2sina \cdot cosa \tag{4.1.2}$$

$$y'''sin^4x = sin2x,$$

$$y''' = \frac{sin2x}{sin^4x} = \frac{2sinx \cdot cosx}{sin^4x} = 2\frac{cosx}{sin^3x}.$$

Проинтегрируем уравнение, используя и свойство внесения значения в дифференциал и $sinx' = cosx$

$$y'' = 2\int \frac{cosx}{sin^3x}dx = 2\int \frac{cosx}{cosx \cdot sin^3x}d(sinx) = 2\int sin^{-3}xd(sinx).$$

Воспользуемся формулой (1.1.4)

$$y'' = \frac{2}{-3+1}sinx^{-3+1} + C_1 = -\frac{1}{sin^2x} + C_1. \tag{4.1.3}$$

# 4.4. Задание 4.1 – интеграл

Проинтегрируем уравнение (4.1.3) еще раз

$$y' = \int (-\frac{1}{sin^2 x} + C_1)dx\,.$$

Используя табличный интеграл

$$\int \frac{1}{sin^2} dx = -ctgx\,,$$

$$y' = -\int \frac{1}{sin^2 x} dx + \int C_1 dx = ctgx + C_1 x + C_2.$$

Итого

$$y = \int ctgxdx + \int (C_1 x + C_2)dx = \int \frac{cosx}{sinx} dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x,$$

# 4.5. Задание 4.1 – решение

Воспользуемся табличным интегралом (1.3.10), тогда

$$y = \int \frac{cosx}{cosx \cdot sinx} d(sinx) + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x = ln|sinx| + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Итоговое решение

$$y = ln|sinx| + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

# 4.6. Задание 4.2 – без *y*

**Задание 4.2**

$$y''' + y''^2 = 0 \qquad (4.2.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.2.1),
не содержащее в явном виде *y*.

# 4.7. Задание 4.2 – подстановка

Сделаем подстановку

$$y'' = u(x),$$
$$y''' = (y'')' = u'.$$

Подставим замещение в (4.2.1)

$$y''' + y''^2 = 0,$$
$$u' + u^2 = 0,$$
$$\frac{du}{dx} = -u^2.$$

Умножаем на $dx$ и делим уравнение на $u^2$

$$\frac{du}{u^2} = -dx.$$

## 4.8. Задание 4.2 – интегрируем

Интегрируем

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int dx\,.$$

Применяя формулы (1.1.4) и (1.2.9), получаем

$$\int u^{-2} du = -\int dx\,,$$

$$-\frac{1}{u} = -x - C_1,$$

$$u = \frac{1}{x + C_1},$$

$$y'' = u = \frac{1}{x + C_1}.$$

Находим интеграл

# 4.9. Задание 4.2 – интегрируем

$$y' = \int \frac{dx}{x + C_1} = -\int \frac{d(x + C_1)}{x + C_1}.$$

Применяя формулу (1.3.10), получаем

$$y' = \ln|x + C_1| + C_2.$$

Повторно интегрируем

$$y = \int (\ln|x + C_1| + C_2)dx = \int \ln|x + C_1|dx + C_2x.$$

Воспользуемся табличным значением

$$\int lnxdx = xlnx - x + C. \qquad (4.2.2)$$

# 4.10. Задание 4.2 – формула

$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - (x + C_1) + C_3 + C_2 x,$$
$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - x + C_2 x + C_4.$$

Рассмотрим случай $u^2 = 0$

$$y'' = u = 0.$$

Последовательно интегрируем

$$y' = C_1,$$
$$y = C_1 x + C_2.$$

Общее решение запишется в виде

# 4.11. Задание 4.2 – решение

$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - x + C_2 x + C_4,$$
$$y = C_1 x + C_2.$$

# 4.12. Задание 4.3 – без *x*

**Задание 4.3**

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0 \qquad (4.3.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.3.1),
не содержащее в явном виде $x$.

# 4.13. Задание 4.3 – подстановка

Сделаем подстановку

$$y' = \frac{dy}{dx} = u(y), \qquad (4.3.2а)$$

$$y'' = (y')' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{du}{dy} = u\frac{du}{dy}. \qquad (4.3.2б)$$

Подставим (4.3.2) в (4.3.1)

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0,$$

$$2yu\frac{du}{dy} + u^2 + u^4 = 0,$$

$$2y\frac{du}{dy} + u + u^3 = 0,$$

$$2y\frac{du}{dy} = -(u + u^3).$$

Умножаем на $dy$ и делим уравнение на $y(u + u^3) = yu(1 + u^2)$

# 4.14. Задание 4.3 – интегрируем

$$2\frac{du}{u(1+u^2)} = -\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем

$$2\int\frac{du}{u(1+u^2)} = -\int\frac{dy}{y}. \qquad (4.3.3)$$

Найдем левую часть уравнения (4.3.3)

$$\frac{1}{u(1+u^2)} = \frac{1+u^2-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{(1+u^2)},$$
$$\int\frac{du}{u(1+u^2)} = \int\frac{du}{u} - \int\frac{udu}{(1+u^2)}.$$

Воспользуемся формулой (1.3.10) и правилом возведения в дифференциал

# 4.15. Задание 4.3 – подставляем

$$\int \frac{du}{u(1+u^2)} = \ln|u| - \frac{1}{2}\int \frac{ud(1+u^2)}{u(1+u^2)} = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|1+u^2|. \qquad (4.3.4)$$

Найдем правую часть уравнения (4.3.3)

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|. \qquad (4.3.5)$$

Подставим (4.3.4) и (4.3.5) в (4.3.3)

$$2\ln|u| - \ln|1+u^2| + \ln|y| = C_1.$$

Потенцируем

$$\frac{u^2|y|}{1+u^2} = e^{C_1}.$$

# 4.16. Задание 4.3 – подстановка

Сделаем подстановку $e^{C_1} \to \frac{1}{C_1} > 0$ и используем замену (4.3.2а), тогда

$$\frac{u^2 y}{1+u^2} = \frac{1}{C_1},$$
$$u^2 y\, C_1 = 1 + u^2,$$
$$u^2 (C_1 y - 1) = 1,$$
$$u^2 = \frac{1}{(C_1 y - 1)},$$
$$u = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{(C_1 y - 1)}},$$
$$\sqrt{(C_1 y - 1)}\,dy = \pm dx.$$

Интегрируем

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}\,dy = \pm \int dx\,. \qquad (4.3.6)$$

Найдем правую часть уравнения (4.3.6), используя (1.2.9)

# 4.17. Задание 4.3 – подставляем

$$\int dx = x. \tag{4.3.7}$$

Найдем левую часть уравнения (4.3.6), используя формулу (1.1.4) и правило возведения под знак дифференциала

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}dy = \int (C_1 y - 1)^{1/2} dy = \frac{1}{C_1}\int (C_1 y - 1)^{1/2} d(C_1 y - 1),$$

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}dy = \frac{1}{C_1}\frac{2}{3}(C_1 y - 1)^{3/2}. \tag{4.3.8}$$

Подставим (4.3.7) и (4.3.8) в (4.3.6)

$$\frac{2}{3C_1}(C_1 y - 1)^{3/2} = \pm(x + C_2),$$

$$2(C_1 y - 1)^{3/2} = \pm 3C_1(x + C_2),$$

$$4(C_1 y - 1)^3 = 9{C_1}^2(x + C_2)^2,$$

$$(C_1 y - 1)^3 = \frac{9}{4}{C_1}^2(x + C_2)^2,$$

$$C_1 y - 1 = \left(\frac{9}{4}{C_1}^2\right)^{1/3}(x + C_2)^{2/3},$$

# 4.18. Задание 4.3 – находим

$$y = \frac{1}{C_1} + \left(\frac{9}{4C_1}\right)^{1/3} (x + C_2)^{2/3}. \qquad (4.3.9)$$

Рассмотрим случай $yu(1 + u^2) = 0$, т.е. $u = 0$

$$u = 0,$$
$$y' = u = 0,$$
$$y = C. \qquad (4.3.10)$$

Общее решение с учетом (4.3.9) и (4.3.10) запишется

$$y = \frac{1}{C_1} + \left(\frac{9}{4C_1}\right)^{1/3} (x + C_2)^{2/3},$$
$$y = C.$$

# Список литературы


- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Лань, 2003. – 816 с.