РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

1. Оглавление

2. Общий вид уравнения *n*-го порядка

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

где F – некоторая функция от n+2 переменных, $n \geq 1$,
x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция,
$y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ – ее производные.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка

уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно.

3. Обыкновенные и уравнения в производных

Дифференциальное уравнение

Обыкновенное

искомая функция зависит от одной переменной

В частных производных

искомая функция зависит от нескольких переменных

4. Решение уравнения, интегральная кривая

Решение дифференциального уравнения
называется функция *y(x)*, имеющая производные до *n*-го порядка включительно, и такая, что ее подстановка в уравнение (1) обращает его в тождество.

Задача интегрирования
есть задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения.

Интегральная кривая
есть график решения дифференциального уравнения.

5. Общее и частное решения

Общее решение дифференциального уравнения (1) *n*-го порядка

такое его решение

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, .., c_n) \qquad (2)$$

которое является функцией переменной *x* и *n* произвольных независимых $c_1, c_2, .., c_n$. Уравнение (1) имеет бесконечное множество решений (2).

Частное решение дифференциального уравнения (1)

требует задания начальных условий:

$$\begin{gathered} y(x_0) = x_0, \\ y'(x_0) = x_0^1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = x_0^{(n-1)}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Задача Коши

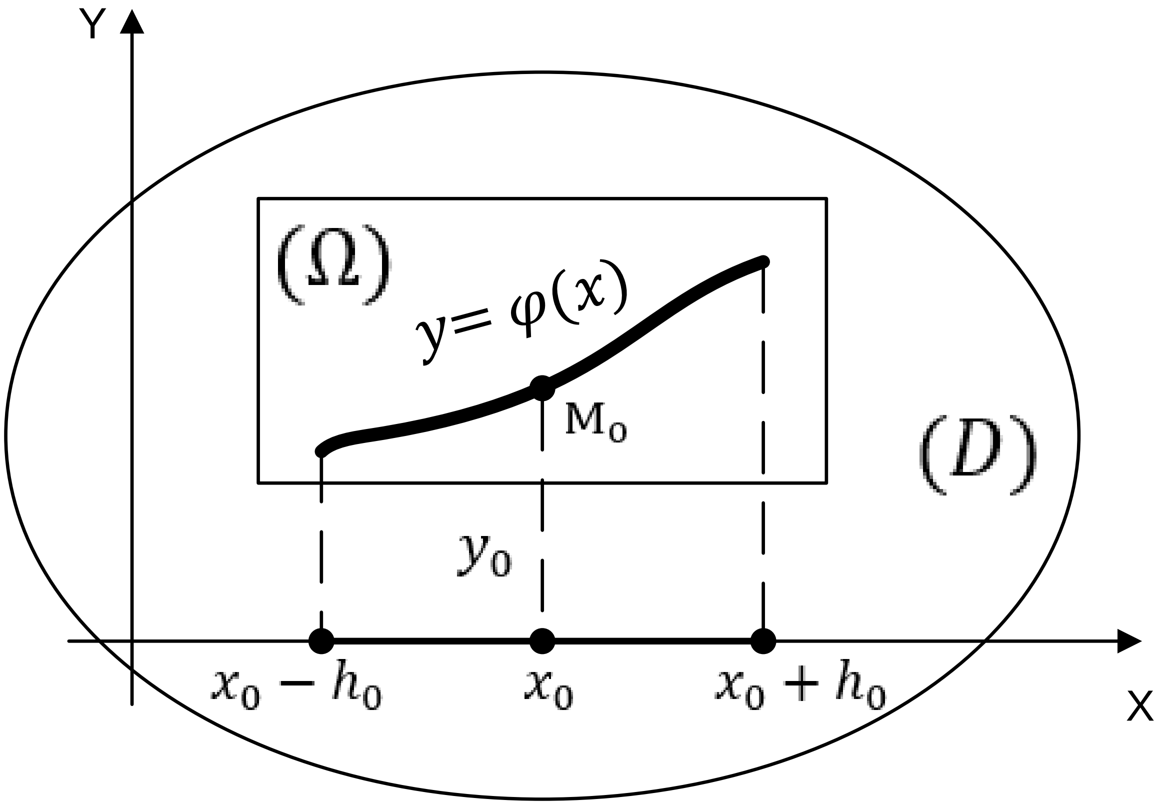
отыскание решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (3).

6. Теорема Коши и интерпретация (1 из 2)

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши
если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = x_0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Коши
при выполнении условий теоремы существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0).

6. Теорема Коши и интерпретация (2 из 2)



7. Виды уравнений и способы их решения

7.1. С разделенными переменными

Уравнение с разделенными переменными
$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$

Метод решения

Интегрируем уравнение, находим решение, используя значения табличных интегралов

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = 0.$$

7.2. С разделяющимися переменными (1 из 4)

Уравнение с разделяющимися переменными (вариант А)

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Метод решения

Почленно делим на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$ для приведения уравнения к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

Интегрируем, используя значения табличных интегралов, находим решение

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0.$$

7.2. С разделяющимися переменными (2 из 4)

Замечание
при проведении почленного деления на $Q_1(y)P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому требуется отдельно решить уравнение $Q_1(y)P_2(x) = 0$ и найти особые решения, которые не могут быть получены из общего.

7.2. С разделяющимися переменными (3 из 4)

Уравнение с разделяющимися переменными (вариант Б)

$$y' = P(x)Q(y).$$

Метод решения

Записываем производную через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx} = P(x)Q(y).$$

Почленно умножаем на *dx* и делим на $Q(y)$

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)dx.$$

7.2. С разделяющимися переменными (4 из 4)

Интегрируем, используя
значения табличных интегралов, находим общее решение

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx\,.$$

Так как было выполнено деление на $Q(y)$, ищем особое решение
$$Q(y) = 0$$
и определяем входит ли оно в общее.

7.3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными (1 из 2)

Приводящиеся к разделяющимися переменным
$y' = f(ax + by + c), b \neq 0.$ (5)

Метод решения

Делаем подстановку

$$u = ax + by + c,$$
$$y = y(x),\ u = u(x).$$

Дифференцируем u по x

$$u' = (ax + by + c)' = a + by'. \quad (6)$$

Делаем подстановку в (6) значения функции (5)

7.3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными (2 из 2)

$$u' = a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(u).$$

Или

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u). \qquad (7)$$

Умножим (7) на dx и поделим на $a + bf(u)$

$$\frac{du}{a+bf(u)} = dx. \qquad (8)$$

Проинтегрируем (8) и получим общий интеграл

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx = x + C.$$

Кроме того, необходимо рассмотреть случай $a + bf(u) = 0$.

7.4. Однородные уравнения (1 из 3)

Однородное дифференциальное уравнение

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{9}$$

Определение того, что уравнение однородное

Делаем подстановку: $x \to xt, y \to yt$

$$y = \frac{dy}{dx} \to \frac{dty}{dtx} \to \frac{tdy}{tdx} = \frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

Так как t в (10) сократилось, значит уравнение однородно.

Метод решения

Делаем подстановку

7.4. Однородные уравнения (2 из 3)

$$y = ux,$$
$$y = y(x),\ u = u(x).$$

Дифференцируем y по x

$$y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u. \tag{11}$$

Делаем подстановку в (9) найденного значения (11)

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$u'x + u = f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{ux}{x}\right) = f(u),$$
$$u'x + u = f(u),$$
$$.\frac{du}{dx}x = f(u) - u, \tag{12}$$

Умножим (12) на dx и поделим на $x(f(u) - u)$

7.4. Однородные уравнения (3 из 3)

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}. \qquad (13)$$

Проинтегрируем (13) и получим общий интеграл

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln(Cx).$$

Кроме того, необходимо рассмотреть случай $x(f(u)-u) = 0$.

7.5. Приводящиеся к однородным (1 из 2)

Приводящиеся к однородным уравнение

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+gy+h}\right). \qquad (14)$$

Определение, что уравнение приводится к однородному

Делаем подстановку: $ax + by + c \ \to t(ax + by + c)$,
$ex + gy + h \to t(ex + gy + h)$.

Если t в (14) после подстановки сократилось,
значит уравнение приводится к однородному.

Метод решения

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ ex + gy + h = 0. \end{cases}$$

7.5. Приводящиеся к однородным (2 из 2)

Пусть система имеет решение x_0, y_0, Тогда

Делаем подстановку $x = t + x_0, y = u + y_0$, где $u = u(t)$. Т $F\left(\frac{u}{t}\right)$ огда

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ ex_0 + gy_0 + h = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Делаем подстановку $x = t + x_0, y = u + y_0$, где $u = u(t)$. Тогда с учетом (15)

$$dx = dt, dy = du.$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} = f\left(\frac{a(t+x_0)+b(u+y_0)+c}{e(t+x_0)+g(u+y_0)+h}\right),$$

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{at+bu+ax_0+by_0+c}{et+gu+ex_0+gy_0+h}\right) = f\left(\frac{at+bu}{et+gu}\right) = F\left(\frac{u}{t}\right),$$

$$\frac{du}{dt} = F\left(\frac{u}{t}\right).$$

$\frac{du}{dt} = F\left(\frac{u}{t}\right)$ - однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка, решается подстановкой $u=zt$, $z=z(t)$.

7.6. Однородное обобщенное (1 из 2)

Однородное обобщенное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = x^{\propto-1} \cdot f\left(\frac{y}{x^{\propto}}\right), \propto \neq 0, \propto \neq 1. \qquad (16)$$

Определение, что уравнение приводится к обобщенному однородному

Делаем подстановку $y \to t^{\propto} y,\ x \to tx.$ Если при подстановки в (16) можно подобрать такое $\propto$, что t сокращается, то уравнение является обобщенным однородным. Далее решается уравнение (16) с найденным значением $\propto$.

Метод решения

Делаем подстановку $t = x^{\propto}$, тогда

$$dt = dx^{\propto} = dx^{\propto}\frac{dx}{dx} = dx^{\propto-1}dx = \propto x^{\propto-1}dx.$$

7.6. Однородное обобщенное (2 из 2)

Отсюда получаем

$$dt = \propto x^{\propto-1}dx,$$
$$\frac{1}{dx} = \propto x^{\propto-1}\frac{1}{dt},$$
$$\frac{dy}{dx} = \propto x^{\propto-1}\frac{dy}{dt}. \tag{17}$$

Подставляем (17) в (16) с учетом подстановки

$$\propto x^{\propto-1}\frac{dy}{dt} = x^{\propto-1}\cdot f\left(\frac{y}{x^{\propto}}\right) = x^{\propto-1}\cdot f\left(\frac{y}{t}\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\propto} f\left(\frac{y}{t}\right). \tag{18}$$

Уравнение (18) однородное, решается заменой $y = zt$, $z = z(t)$.

7.7. Метод Лагранжа (1 из 4)

Рассмотрим уравнение

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{19}$$

Метод решения

Ищем решение однородного уравнения (19)

$$y' + p(x)y = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{20}$$

Умножаем (20) на *dx* и делим на *y*

$$\frac{dy}{dy} + p(x)dx = 0. \tag{21}$$

Интегрируем (21)

7.7. Метод Лагранжа (2 из 4)

$$\int \frac{dy}{dy} + \int p(x)dx = \mathrm{C},$$

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \mathrm{C},$$

$$\ln|y| = C - \int p(x)dx\,. \tag{22}$$

Потенцируем (22)

$$|y| = e^{C} \cdot e^{-\int p(x)dx},$$
$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{23}$$

Заменим в (24) *C* на функцию от *x*: $C \to u(x),$ тогда

$$y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{24}$$

7.7. Метод Лагранжа (3 из 4)

Найдем производную для части уравнения (24)

$$\left(-\int p(x)dx\right)' = -p(x),$$
$$\left(e^{-\int p(x)dx}\right)' = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(-\int p(x)dx\right)' = -\, e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

Рассчитаем производную от (23) с учетом результатов выше

$$y' = \left(u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\right)' = u(x)' \cdot e^{-\int p(x)dx} + u(x) \cdot \left(e^{-\int p(x)dx}\right)',$$
$$y' = u(x)' \cdot e^{-\int p(x)dx} - u(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (25)$$

Подставим (24) и (25) в исходное уравнение (19)

$$y' + p(x)y = q(x),$$
$$u(x)' \cdot e^{-\int p(x)dx} - u(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + p(x) \cdot \ u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
$$u(x)' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
$$u(x)' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

7.7. Метод Лагранжа (4 из 4)

Проинтегрируем найденное значение

$$u(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C. \qquad (26)$$

Подставим (26) в (24) для получения общего решения

$$y = u(x) \cdot e^{-\int p(x)dx},$$

$$y = \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C\right] \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

7.8. Метод Эйлера k-го порядка

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x, y),\ x_0 \le x \le b, y(x_0) = y_0, h = h_0.$$

Метод решения

Отрезок интегрирования $[x_0, b]$ делим на равные части h
и по значению $y(x_0 + lh) = y_l$ вычисляем

$$y_{l+1} = y_l + h\dot{y}_l + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_l + \cdots + \frac{h^k}{k!} y_l^{(k)}, \text{ где}$$
$$y' = f(x, y),$$
$$y'' = \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial y} \cdot f(x_l, y_l),$$

используя условия

$$x_l = x_0 + hl, l = 0,1,2, \dots, n-1,$$
$$n = \frac{b - x_0}{h}.$$

7.9. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (1 из 2)

Рассмотрим уравнение
$y' = f(x, y),\ x_0 \le x \le b, y(x_0) = y_0, h = h_0.$

Метод решения

Отрезок интегрирования $[x_0, b]$ делим на равные части h
и по значению $y(x_0 + lh) = y_l$ вычисляем

$$y_{i,\,l+1} = y_{i,\,l} + \frac{h}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}),$$

$$k_{i1} = f_i(x_l, y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{ml}),$$

$$k_{i2} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{11}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{21}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l1}}{2}\right),$$

$$k_{i3} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{12}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{22}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l2}}{2}\right),$$

$$k_{i4} = f_i(x_l + h, y_{1l} + hk_{13}, y_{2l} + hk_{23}, \dots, y_{ml} + hk_{l3}),$$

7.9. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (2 из 2)

используя условия

$$x_l = x_0 + hl, l = 0,1,2, \dots, n-1,$$
$$n = \frac{b-x_0}{h}.$$

8.1. Функция Odesolve в MathCad

Функция **ODESOLVE**(x, x_k, n)

▪ используется для решения дифференциальных уравнений в MathCad;
▪ требует записи программного текста, состоящего из 3-х частей:
    ▪ ключевого слова GIVEN;
    ▪ дифференциального уравнения и начальных условий;
    ▪ команды ODESOLVE с указанием параметров:
    x – переменная относительно которой решается уравнение,
    x_k – конец интервала интегрирования,
    n – число шагов интегрирования,
▪ результат работы ODESOLVE есть массив полученных решений.

8.2. Пример Odesolve в MathCad (1 из 2)

$x01 := \frac{\pi}{2} \qquad y01 := \frac{2}{\pi} \qquad x11 := 3\pi$

Given

$x \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + y(x) - \cos(x) = 0$

$y(x01) = y01$

$y1 := \text{Odesolve}(x, x11)$

$x03 := \frac{\pi}{2} \qquad y03 := 0 \qquad x13 := 3\pi$

Given

$x \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + y(x) - \cos(x) = 0$

$y(x03) = y03$

$y3 := \text{Odesolve}(x, x13)$

$x02 := \frac{\pi}{2} \qquad y02 := \frac{-2}{\pi} \qquad x12 := 3\pi$

Given

$x \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + y(x) - \cos(x) = 0$

$y(x02) = y02$

$y2 := \text{Odesolve}(x, x12)$

$x04 := \frac{\pi}{2} \qquad y04 := 0.2 \qquad x14 := 3\pi$

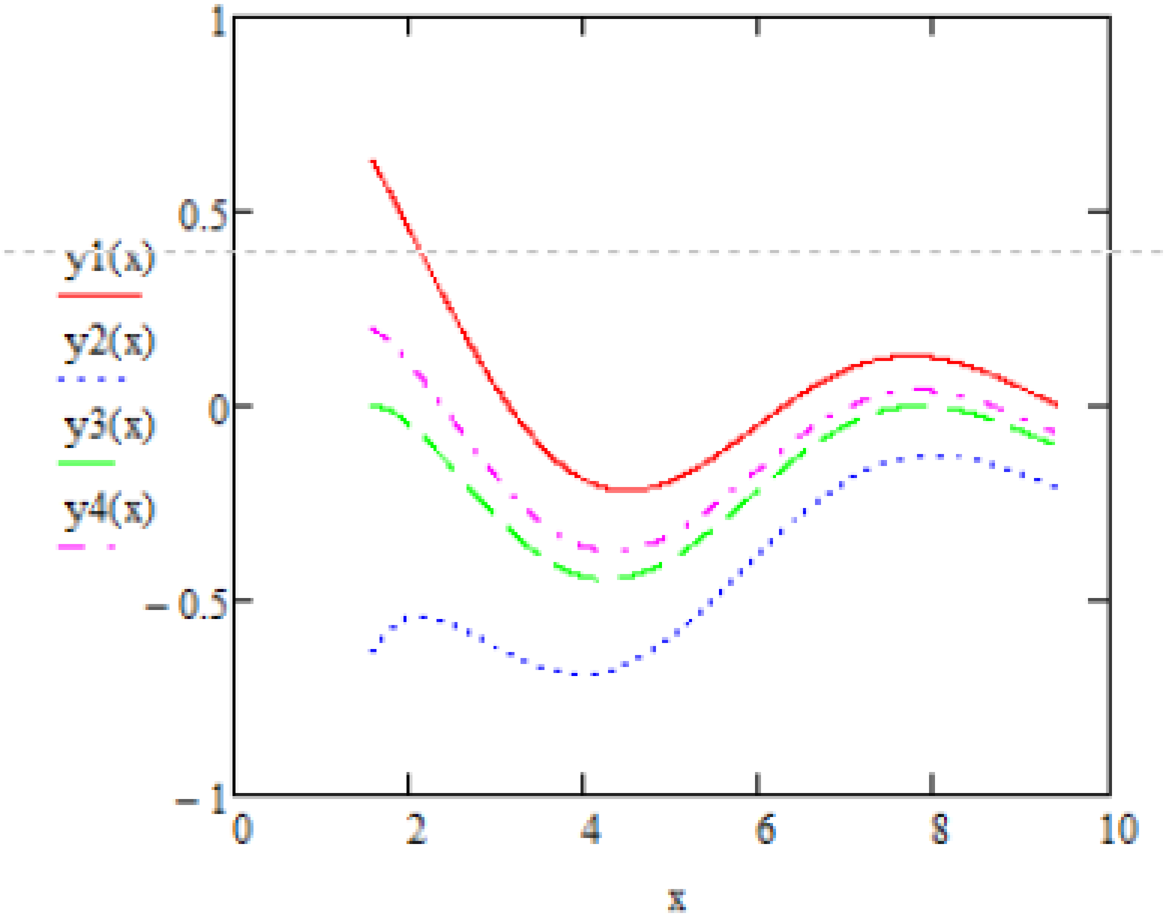
Given

$x \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + y(x) - \cos(x) = 0$

$y(x04) = y04$

$y4 := \text{Odesolve}(x, x14)$

8.2. Пример Odesolve в MathCad (2 из 2)



8.3. Функция Rkfixed в MathCad (1 из 2)

Функция **RKFIXED**(y, x_a, x_b, p, D)

▪ используется для решения дифференциальных уравнений в MathCad;
▪ требует записи программного текста, состоящего из 3-х частей:
  ▪ ключевого слова ORIGIN:=1;
  ▪ дифференциального уравнения и начальных условий;
  ▪ команды RKFIXED с указанием параметров:
  y – вектор начальных условий,
  x_a, x_b– начало и конец интервала интегрирования,
  p – число точек внутри интервала интегрирования для которых ищется решение дифференциального уравнения,
  D – вектор, содержаний производные искомых функций,
▪ результат работы RKFIXED есть матрица из $p+1$ строк, первый столбец содержит точки, для которых получено решения, остальные – сами решения.

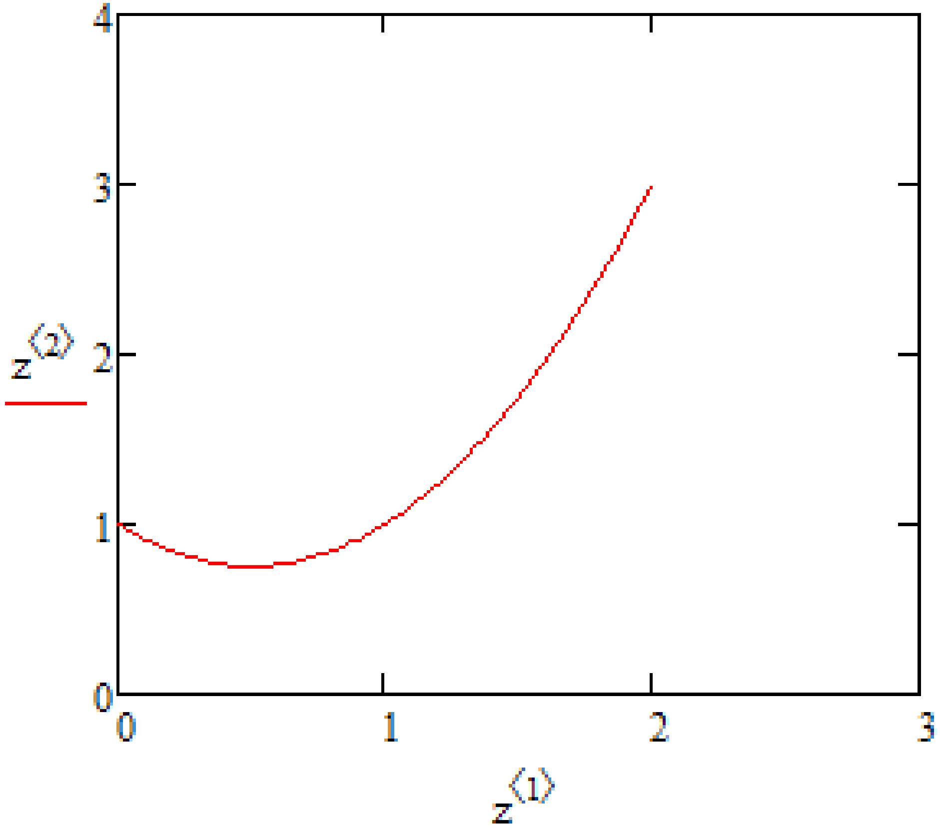
8.4. Пример Rkfixed в MathCad

$ORIGIN := 1$

$Y_1 := 1$

$D(x,y) := -Y_1 + 2x$

$z := rkfixed(Y, 0, 2, 100, D)$



9. Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.