

РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МИРЭА



## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

### ГЛАВА 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Работа посвящена моделированию динамических систем  
с использованием элементов высшей математики

Контакты:

<http://stepanovd.com/training/27-dgvm>

[mail@stepanovd.com](mailto:mail@stepanovd.com)

Автор:

Степанов Дмитрий Юрьевич

к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

# 1. Оглавление

---

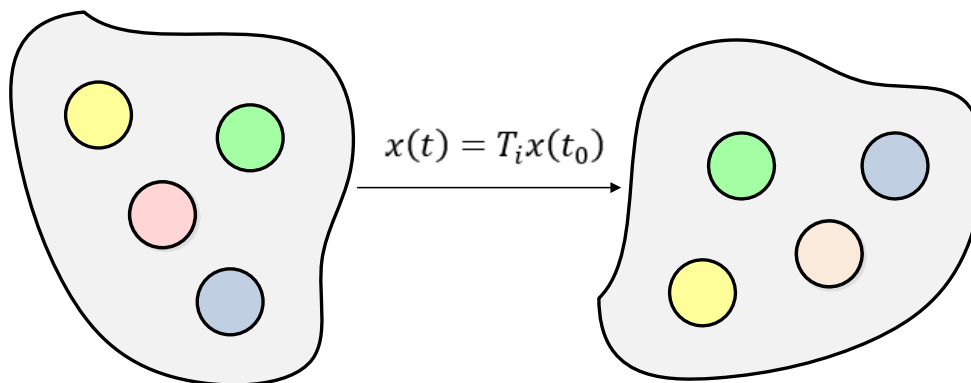
- Самоорганизация, динамическая система, бифуркация и хаос
- Модель хищник-жертва
- Генератор Дуффинга
- Генератор Ван-дер-Поля
- Система Лоренца
- Примеры реализации систем в MathCad

### Система

совокупность элементов и отношений, связанных друг с другом в единое целое, которое обладает свойствами, отсутствующими у элементов или отношений их образующих.

### Динамическая система

объект или процесс, для которого определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон эволюции, описывающий изменение начального состояния с течением времени.



### Динамическая система

в различных литературных источниках часто под определением динамической системы понимают:

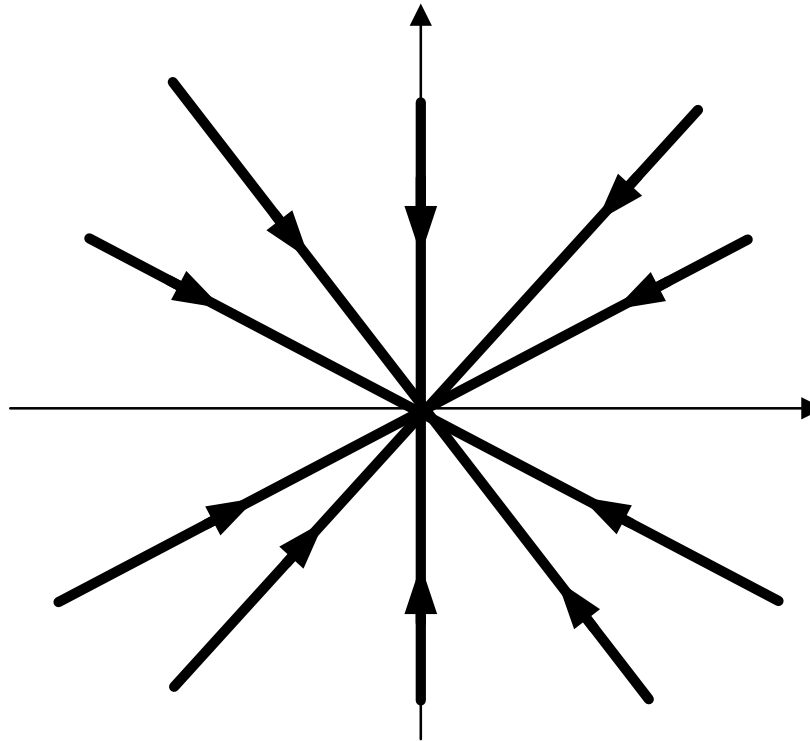
1. синоним термина «система обыкновенных дифференциальных уравнений»  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ ;
2. синоним термина «автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений»  $\dot{x} = f(x)$ ;
3. математическую модель некоторой механической системы;
4. множество преобразований фазового пространства, точки которого представляют различные состояния системы.

### Векторное поле

группа преобразований фазового пространства может быть непрерывной или дискретной. В первом случае преобразования называются потоками, задавая в каждой точке пространства вектор скорости или, как говорят, векторное поле.

## 2.3. Пример векторного поля

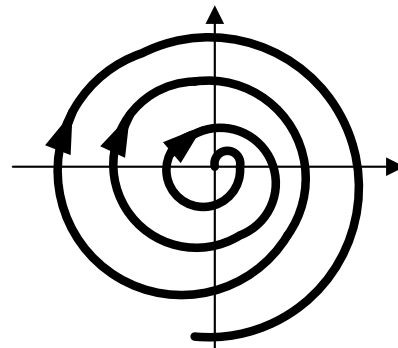
---



## 2.4. Точка покоя, периодический режим, 2-тор и хаос (1 из 2)

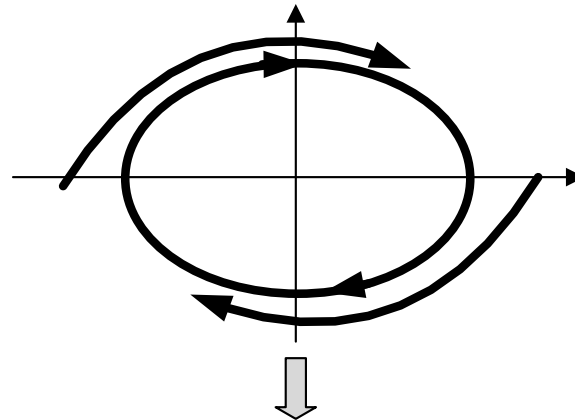
В фазовом пространстве системы существуют неподвижные точки.  
Вид стационарной точки характеризуется размерностью системы  
дифференциальных уравнений. Например:

Неподвижная точка



1-но дифференциальное  
уравнение

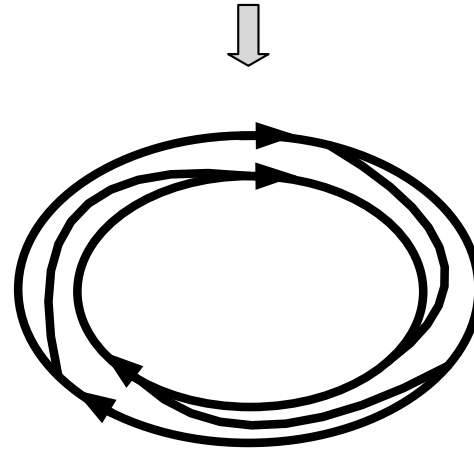
Периодический режим



От 2-х  
дифференциальных  
уравнений

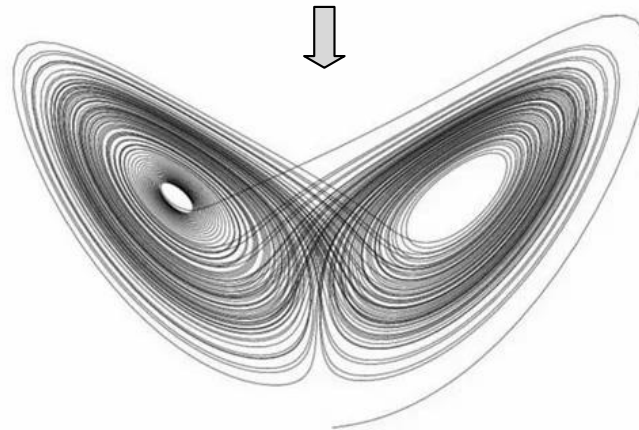
## 2.4. Точка покоя, периодический режим, 2-тор и хаос (2 из 2)

Двухчастотный тор



От 3-х  
дифференциальных  
уравнений

Хаос



От 3-х  
дифференциальных  
уравнений

### Самоорганизация

в система может быть определена как:

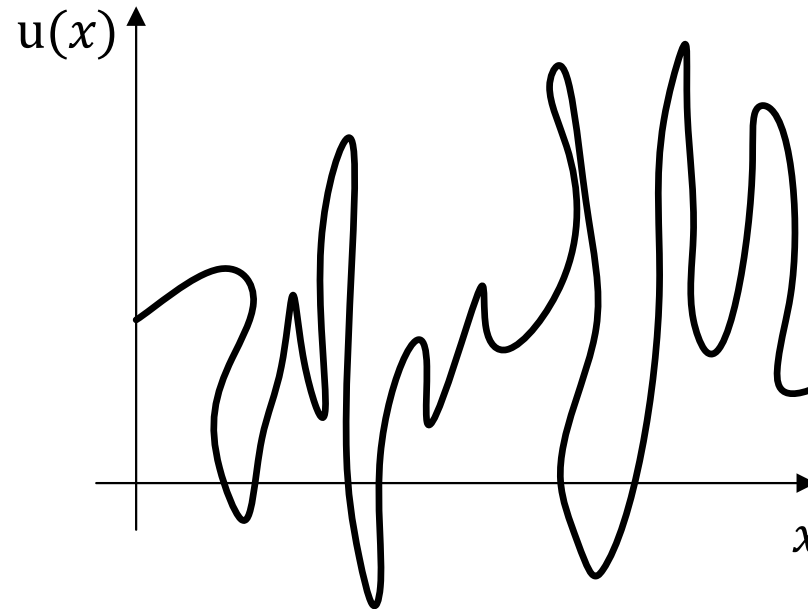
1. переход открытой неравновесной системы от простых и неупорядоченных форм к более сложным и упорядоченным;
2. переход от хаоса к системе;
3. процесс упорядочивания в системе элементов за счет внутренних факторов без внешнего специфического воздействия и др.



## 2.5. Самоорганизация (2 из 3)

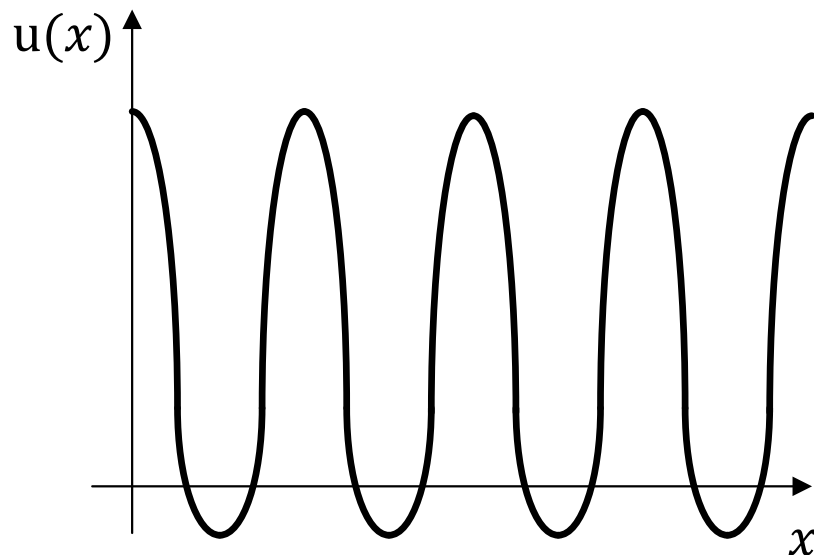
Пусть в начальный момент времени система определена «истерзанной» функцией, как показано на рисунке ниже

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{l}.$$



## 2.5. Самоорганизация (3 из 3)

В процессе эволюции, благодаря различным процессам, неоднородности и резкие перепады сглаживаются и может возникнуть намного более простой характер профиль, иллюстрирующий понятие самоорганизации.



### **Точка бифуркации системы**

может быть определена как:

1. точка разветвления путей эволюции открытой нелинейной системы, которая оказывается на перепутье и должна осуществлять выбор;
2. точка ветвления путей эволюции сложной системы;
3. критическая пороговая точка, в которой происходит качественное изменение поведения системы.

## 3.1. Пример точки бифуркации (1 из 2)

---

Рассмотрим пример дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \mu x - x^3. \quad (1)$$

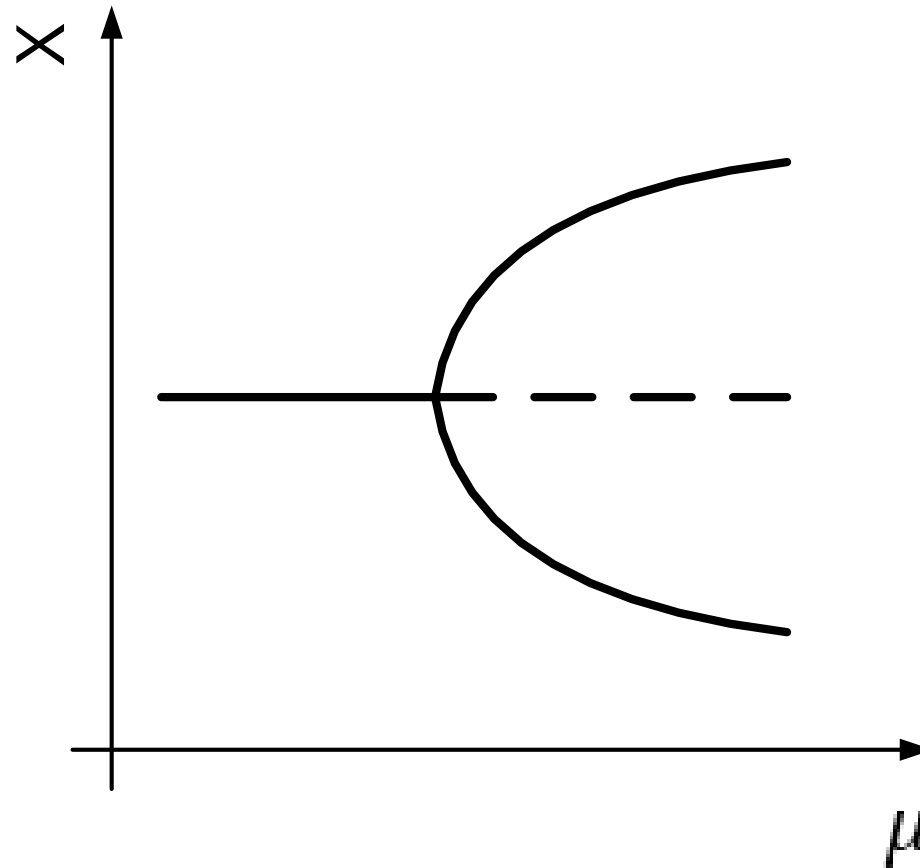
Найдем особые точки уравнения (1)

Так при  $\mu = 0$ ,  
существует одна стационарная точка  $x = 0$ ,  
при  $\mu < 0$ ,  
так же одна стационарная точка  $x = 0$ ,  
но при  $\mu > 0$ ,  
три стационарных точки  $x = 0, x = \pm\sqrt{\mu}$ .

В данном случае бифуркационная диаграмма имеет вид вилки.

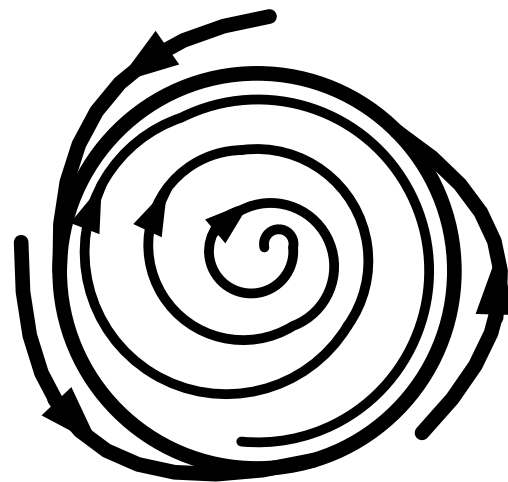
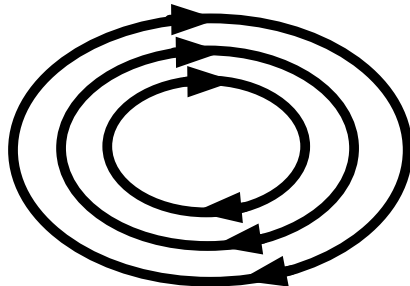
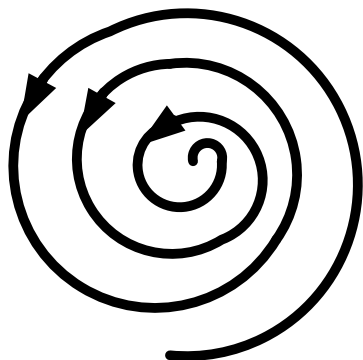
## 3.1. Пример точки бифуркации (2 из 2)

---



### Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа

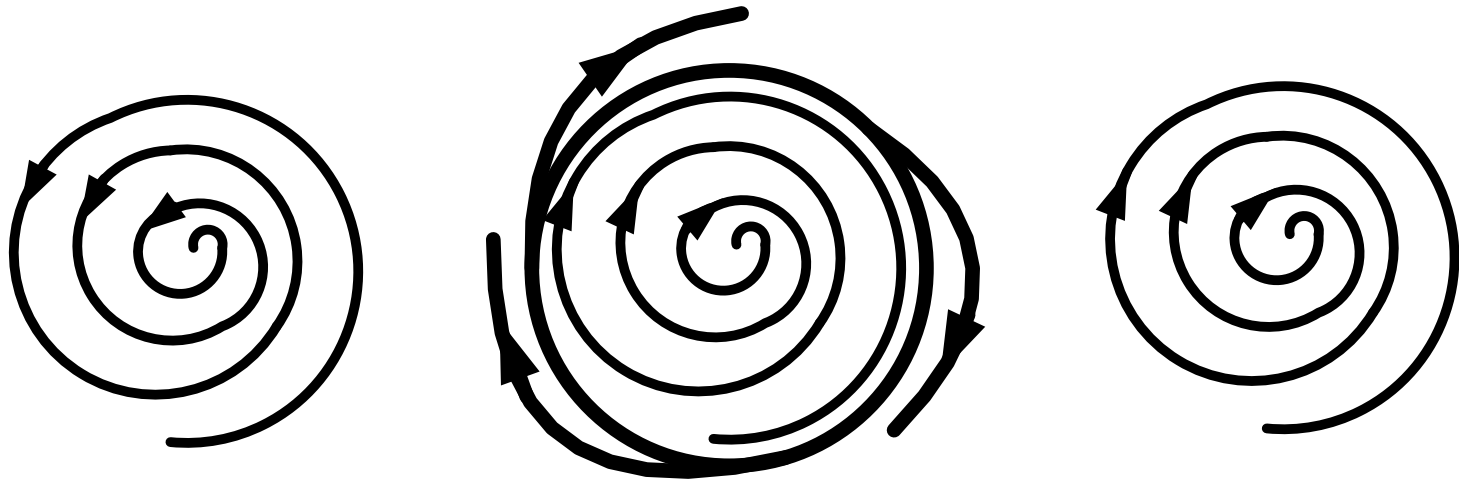
явление перехода стационарной точки вида устойчивых фокус сначала в центр, далее неустойчивый фокус с образованием устойчивого предельного цикла вблизи его окрестности.



## 3.2. Бифуркация Андронова-Хопфа (2 из 2)

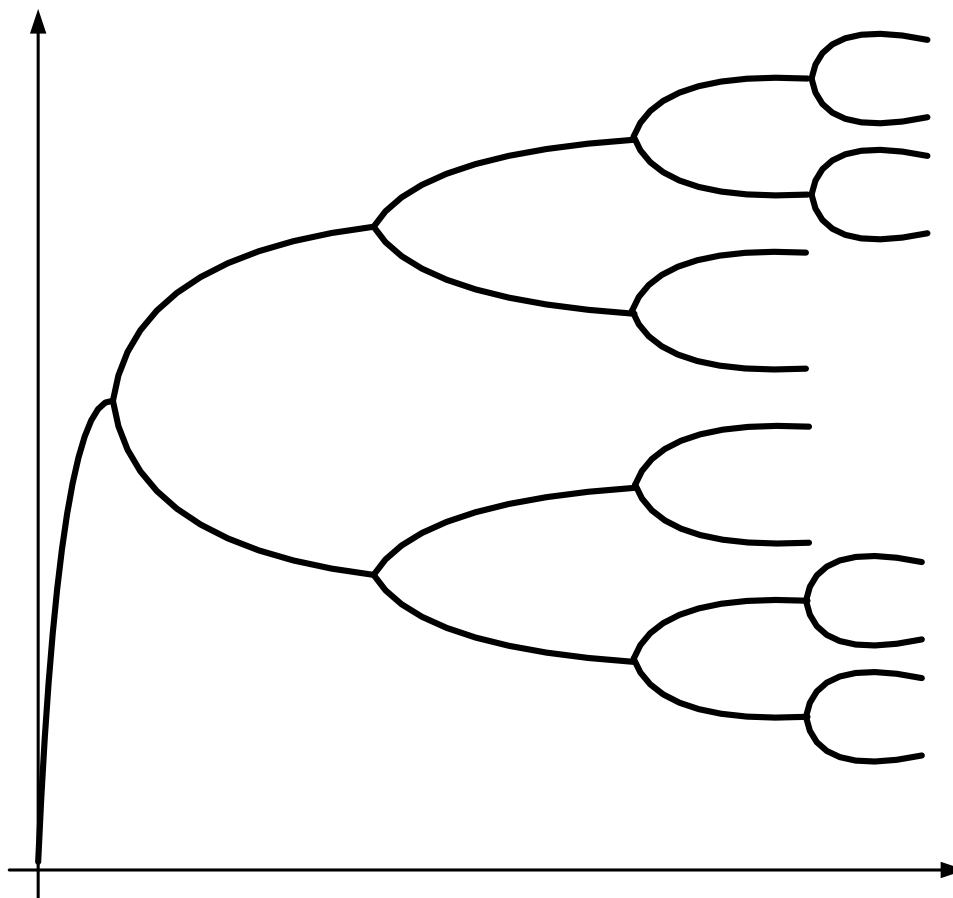
### Субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа

переход стационарной точки вида устойчивых фокус сначала в неустойчивое состояние с «влипанием» в него неустойчивого предельного цикла, далее цикл перестает существовать, а фокус остается неустойчивым.



## 3.3. От бифуркации к хаосу

Бесконечная последовательность бифуркаций Андронова-Хопфа может привести к состоянию хаоса.





### Динамический хаос

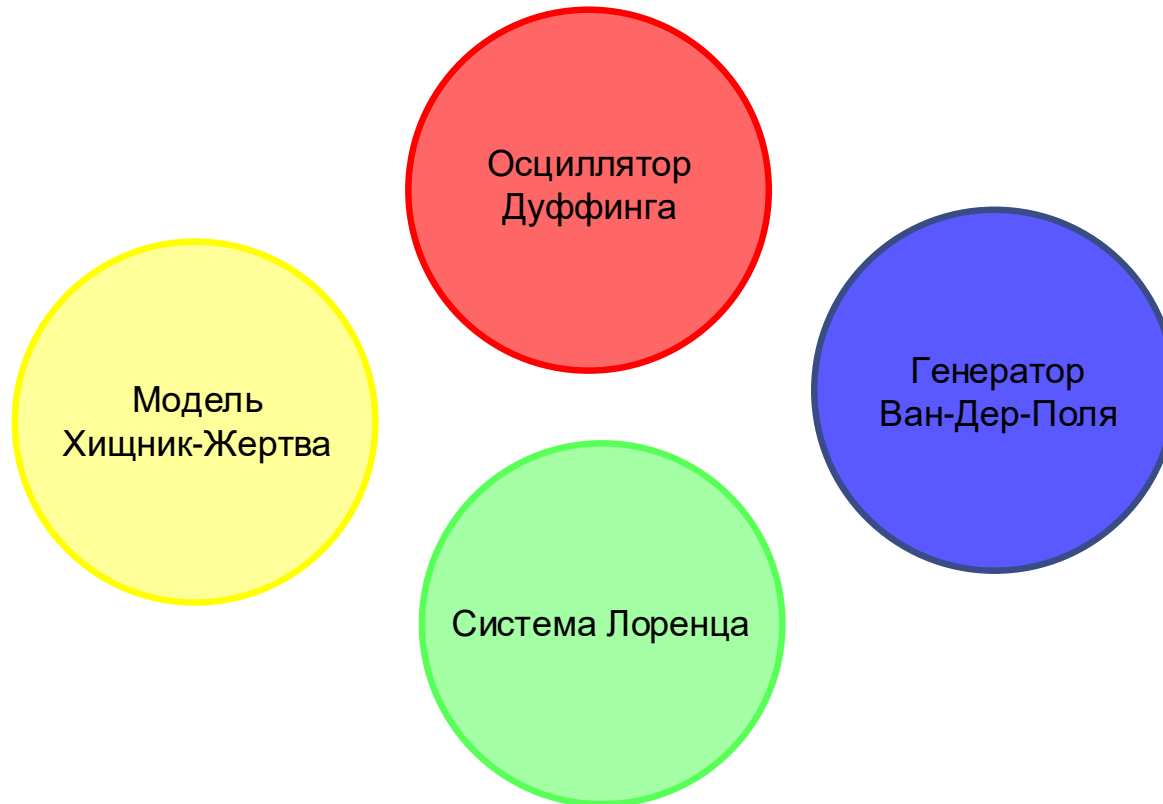
явление, при котором поведение динамической системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами.

### Сценарии перехода к хаосу

1. **Ландау**: бесконечная последовательность бифуркаций Андронова-Хопфа - хаос как бесконечномерный тор;
2. **Рюэля-Такенса**: стационарная точка – цикл – 2-тор – странный аттрактор;
3. **Фейгенбаума**: бесконечная последовательность бифуркаций удвоения – цикл бесконечного периода – хаос;
4. **Помо-Манневиля**: переход к хаосу через «перемежаемость».

## 5. Примеры динамических систем

---



## 6.1. Модель генератора Дуффинга

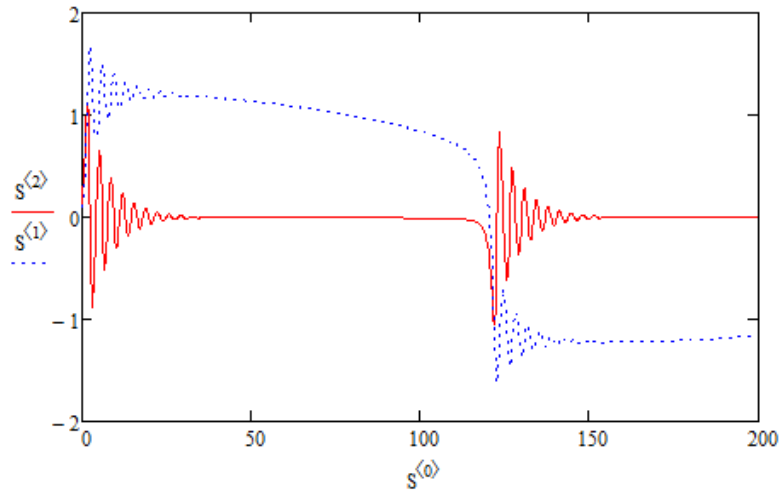
### Генератор Дуффинга

простейшая нелинейная система, представляющая собой одномерную частицу, движущуюся в потенциале. Особенностью осциллятора Дуффинга является возможность получения хаотической динамики. В отличие от линейного осциллятора, модель Дуффинга под действием внешней периодической силы испытывает нестабильное поведение. Уравнение впервые было изучено немецким инженером Георгом Дуффингом в 1918 г.

$$m\ddot{x} = -ax - bx^3,$$

где  $m$  – масса частицы,  $x$  – координата частицы,  
 $a$  и  $b$  – коэффициенты.

## 6.2. Моделирование в MathCad (1 из 3)



$$ts := 0.3$$

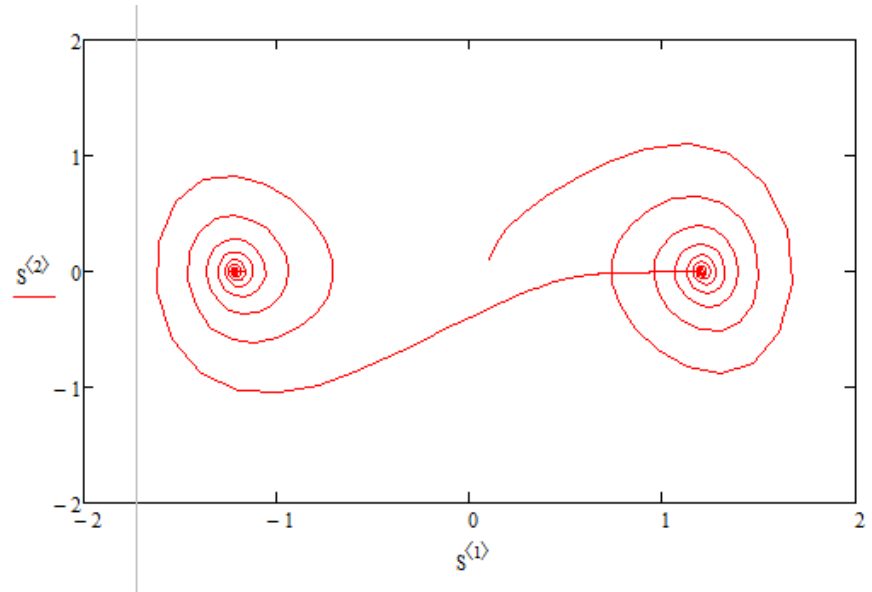
$$w := 0.02$$

$$Aa := 0.6$$

$$ic := \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix}$$

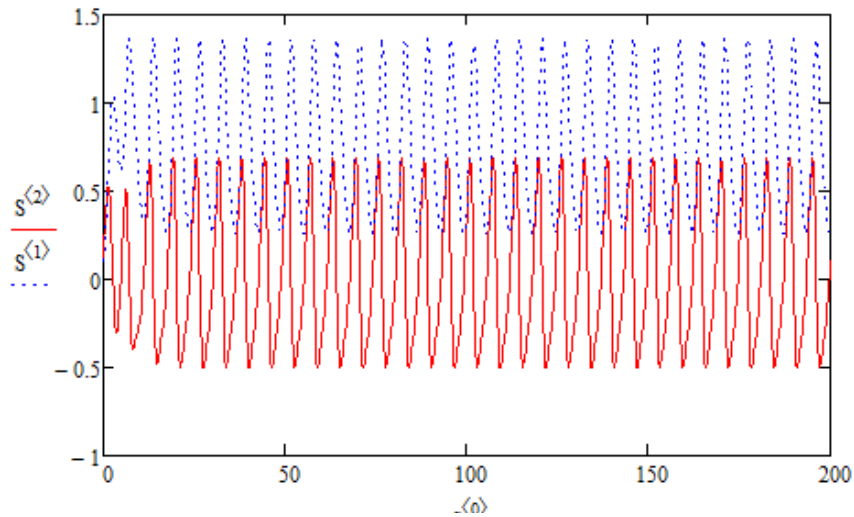
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ Aa \cdot \cos(w \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - ts \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$$S := \text{rkfixed}(ic, 0, 200, 1000, D)$$



Образование стационарной точки вида седло

## 6.2. Моделирование в MathCad (2 из 3)



$ts := 1$

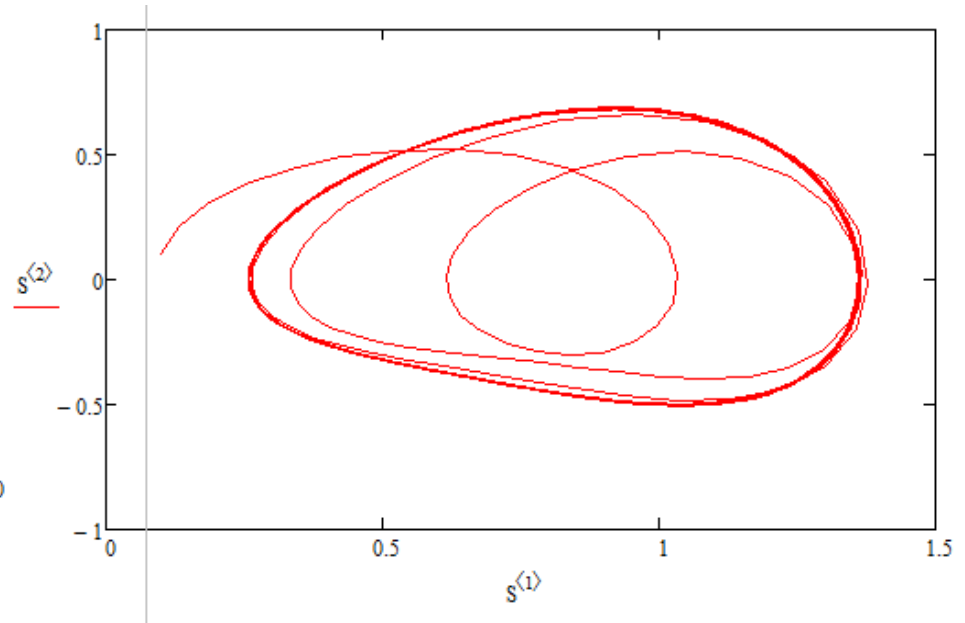
$w := 1$

$Aa := 0.6$

$ic := \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.10 \end{pmatrix}$

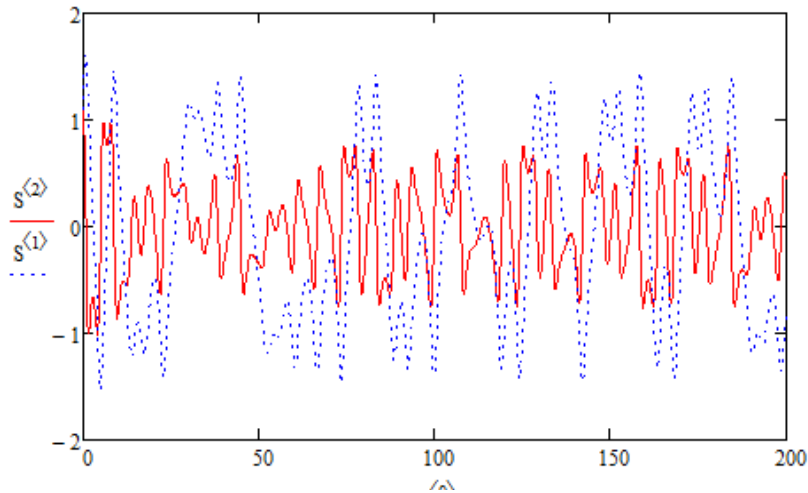
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ Aa \cdot \cos(w \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - ts \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$S := \text{rfixed}(ic, 0, 200, 1000, D)$



Образование стационарной точки вида центр

## 6.2. Моделирование в MathCad (3 из 3)



$ts := 0.2$

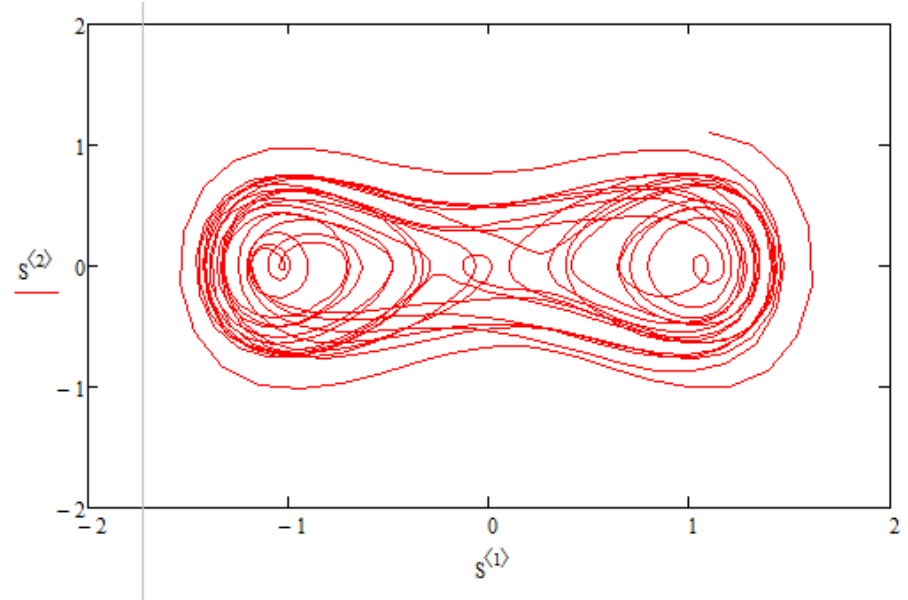
$w := 1$

$Aa := 0.25$

$ic := \begin{pmatrix} 1.10 \\ 1.10 \end{pmatrix}$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ Aa \cdot \cos(w \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - ts \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$S := \text{rkfixed}(ic, 0, 200, 1000, D)$



Образование хаотического режима

## 7.1. Модель генератора Ван-дер-Поля

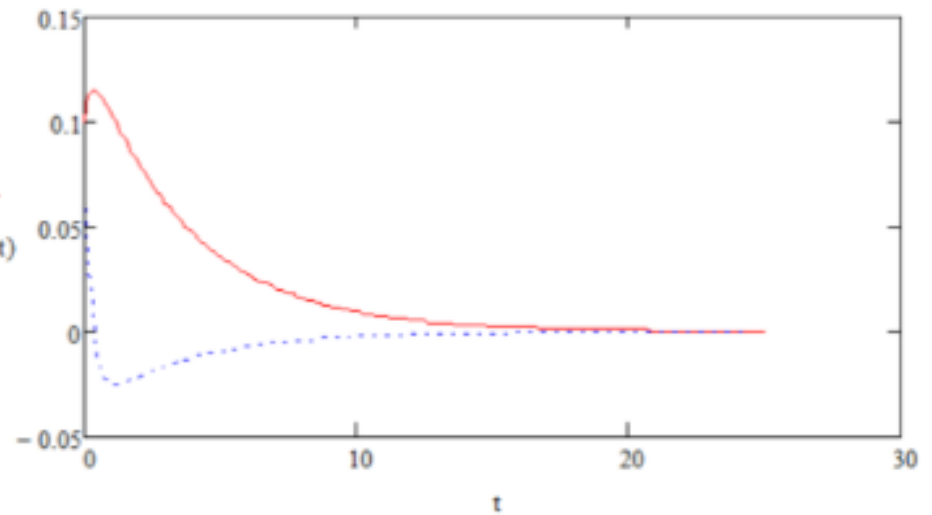
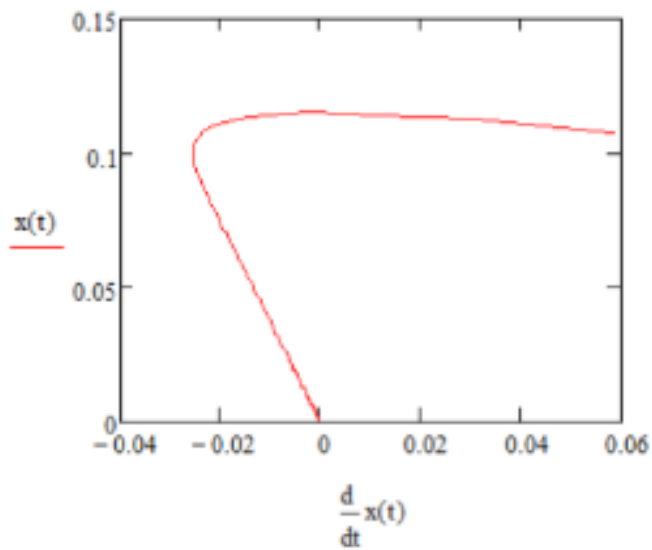
---

### Генератор Ван-дер-Поля

представляет собой генератор с нелинейным затуханием. Был предложен голландским физиком Бальтазаром Ван-дер-Полем, выявившим колебания, позже названные предельными циклами, а также состояние детерминированного хаоса.

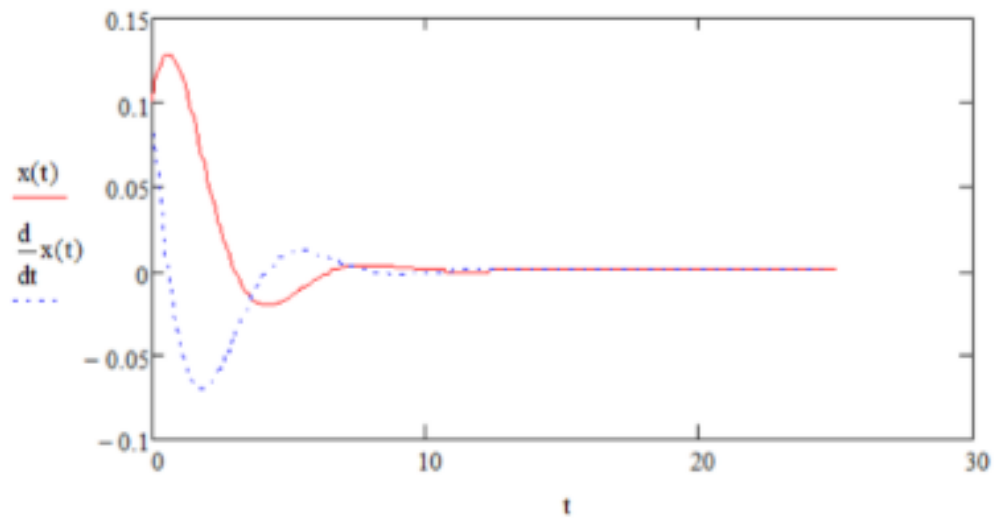
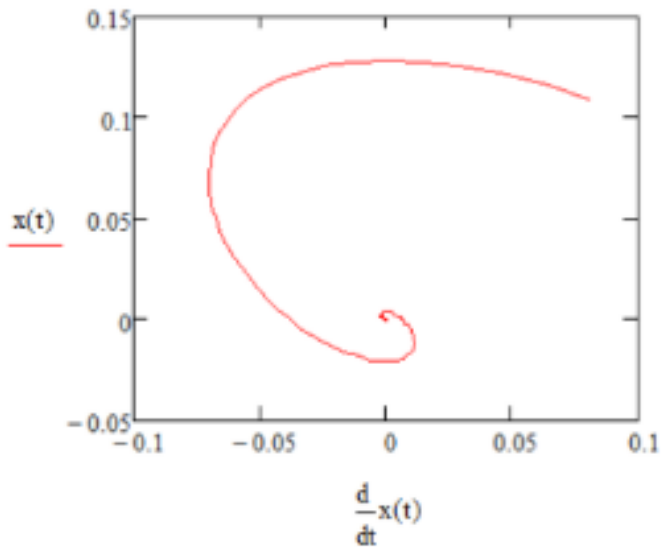
$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

где  $x$  — координата точки, зависящая от  $t$ ,  $\mu$  — коэффициент, характеризующий силу затуханий колебаний.

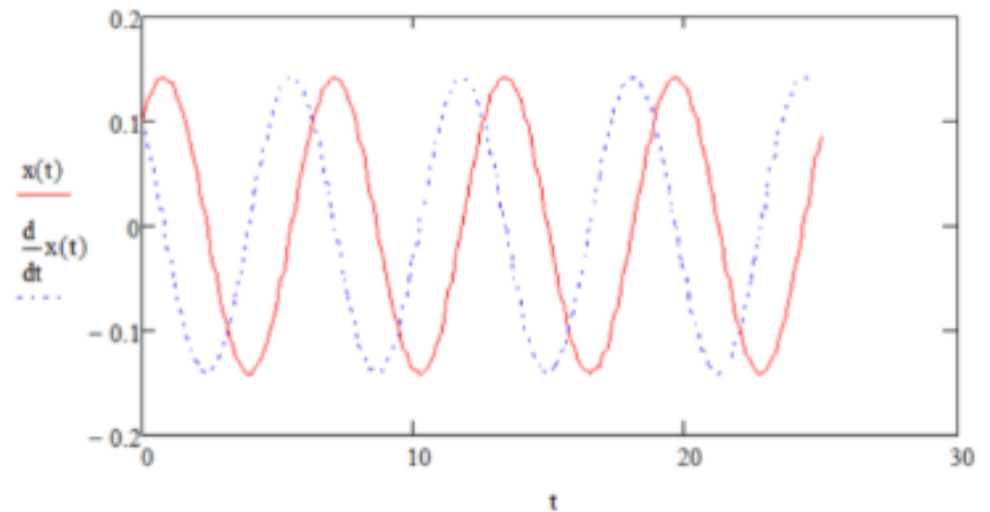
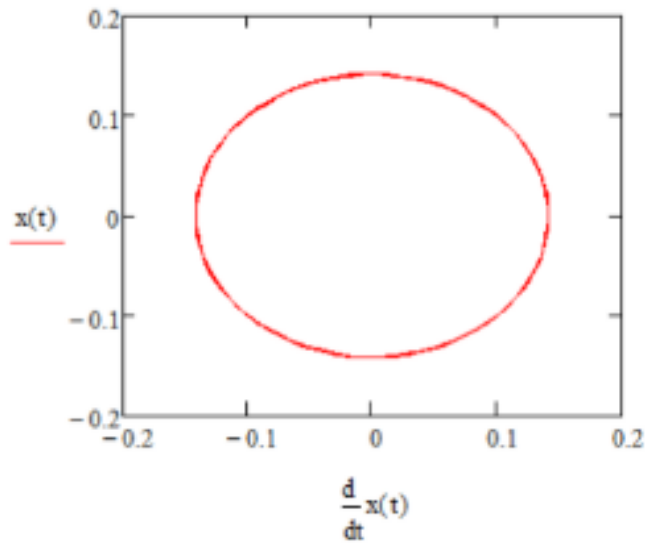


Образование стационарной точки вида устойчивый узел



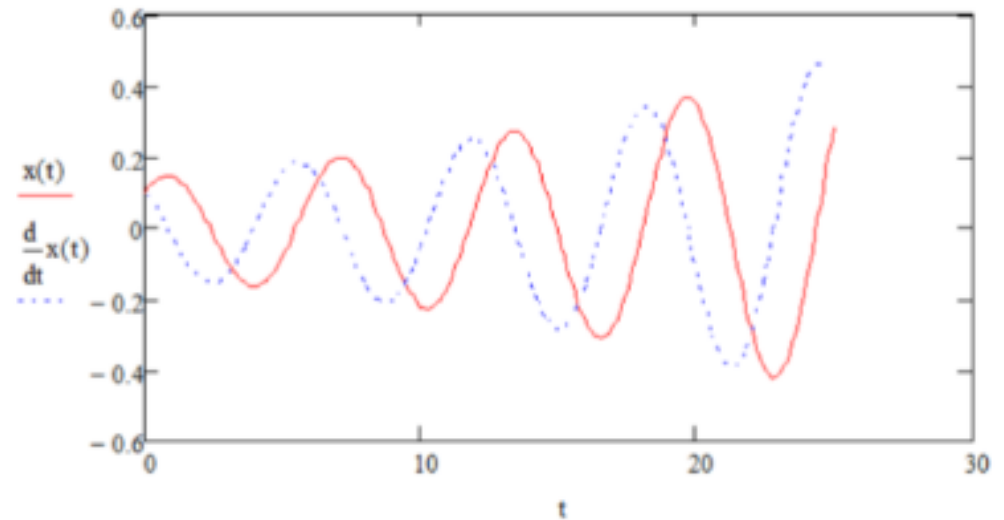
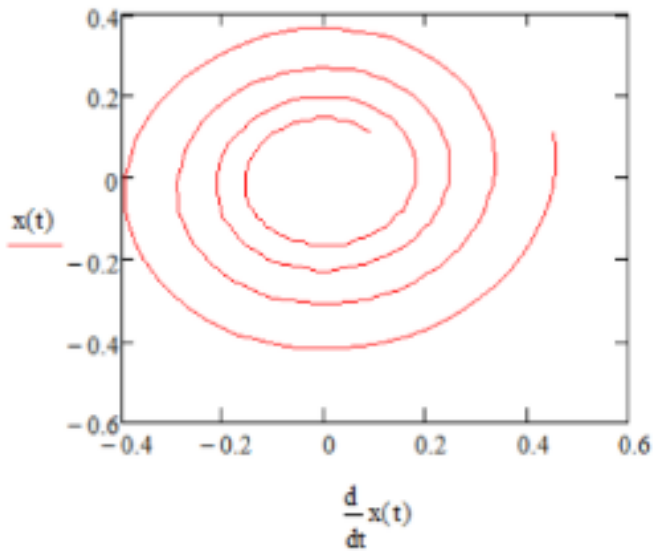


Образование стационарной точки вида устойчивый фокус

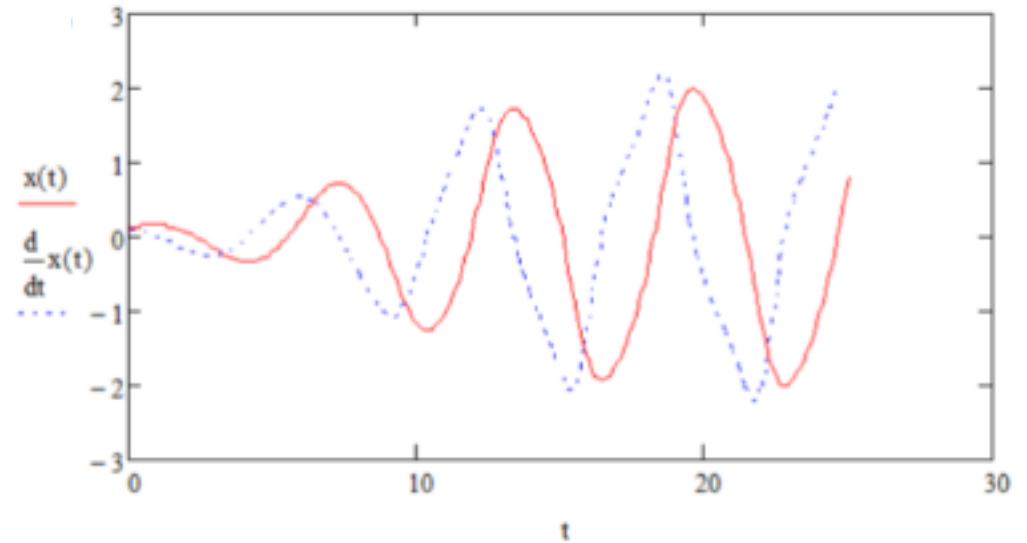
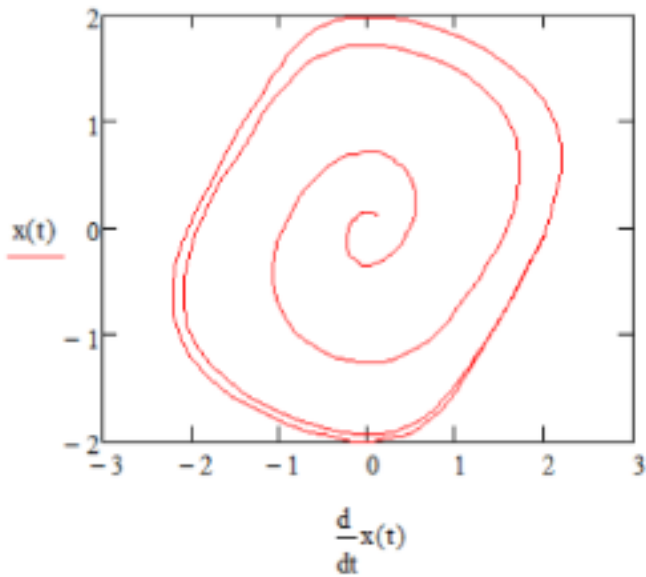


Образование стационарной точки вида центр

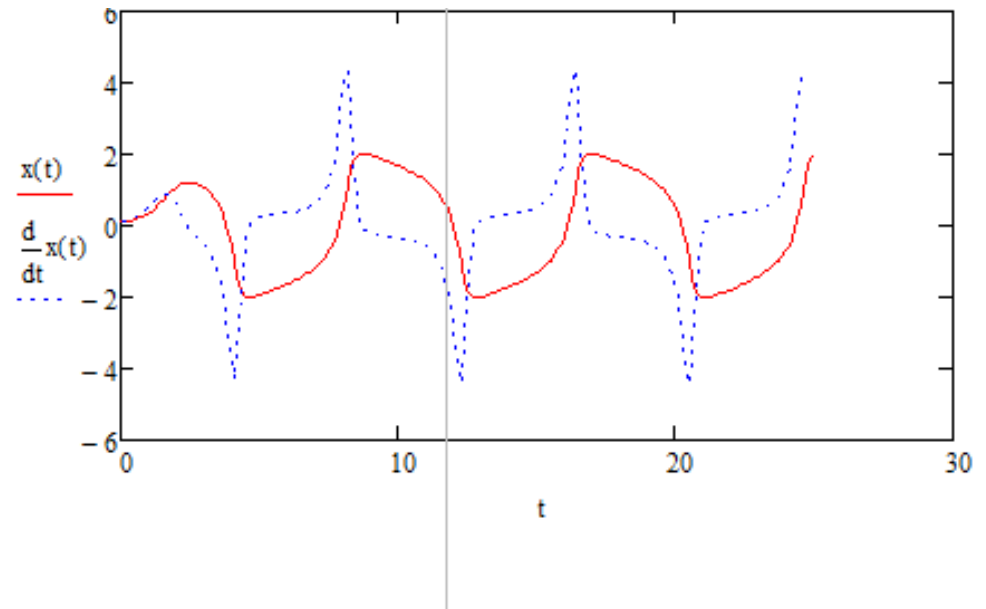
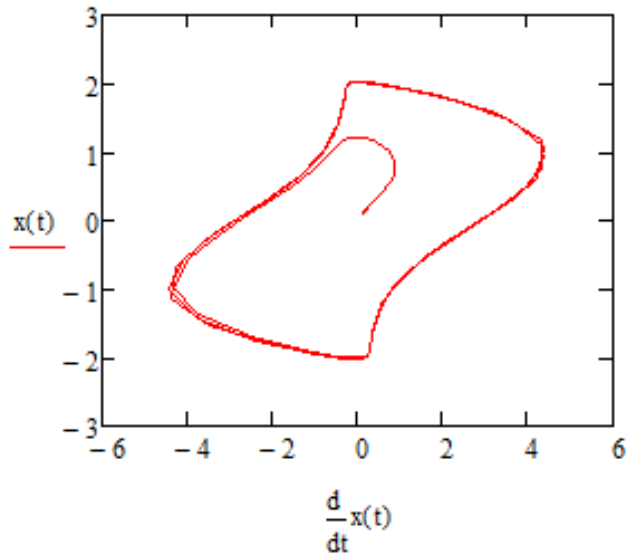
## 7.2. Моделирование в MathCad (4 из 6)



Образование стационарной точки вида неустойчивый фокус



Переход неустойчивого фокуса в цикл



Образование устойчивого предельного цикла

## 7.3. Пример реализации в MathCad

$d := 2.5$

Given

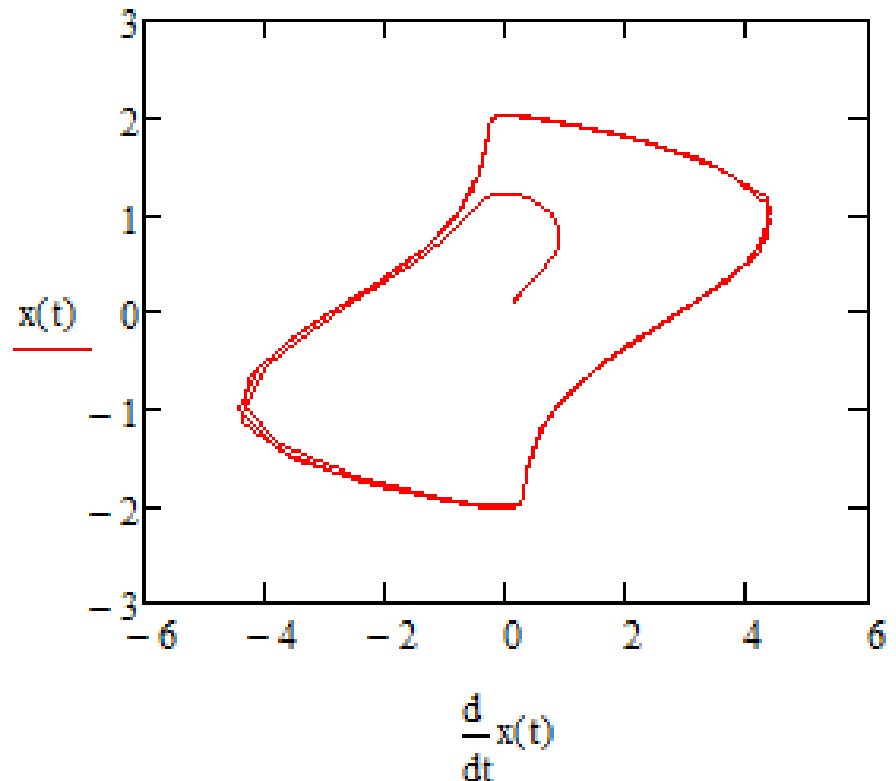
$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) - d \cdot (1 - x(t)^2) \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = 0$$

$$x(0) = 0.1$$

$$x'(0) = 0.1$$

$t := 0, 0.1..25$

$x := \text{Odesolve}(t, 25)$



# 8.1. Модель хищник-жертва, Лотки-Вольтерры

---

## Модель хищник-жертва

состоит в следующем: имеются два вида животных, один из которых пожирает другой. При этом пищевые ресурсы жертвы не ограничены, поэтому при отсутствии хищника популяция жертв возрастает по экспоненциальному закону. Хищники, отделенные от своих жертв, постепенно умирают с голоду так же по этому закону. Как только хищники и жертвы начинают обитать в непосредственной близости друг от друга, изменения численности их популяций становятся взаимосвязанными. Относительный прирост численности жертв будет зависеть от размеров популяции хищников и наоборот. В данной модели считается, что хищники питаются исключительно жертвами.

## 8.2. Математическая модель

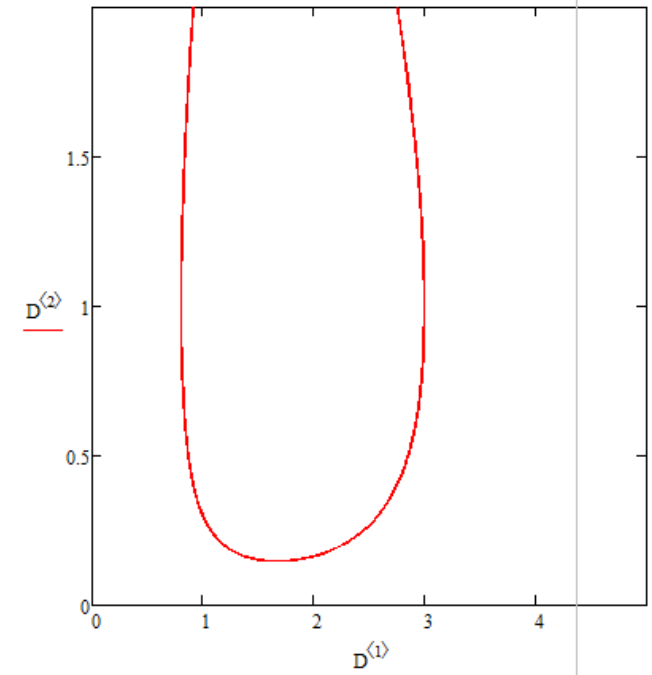
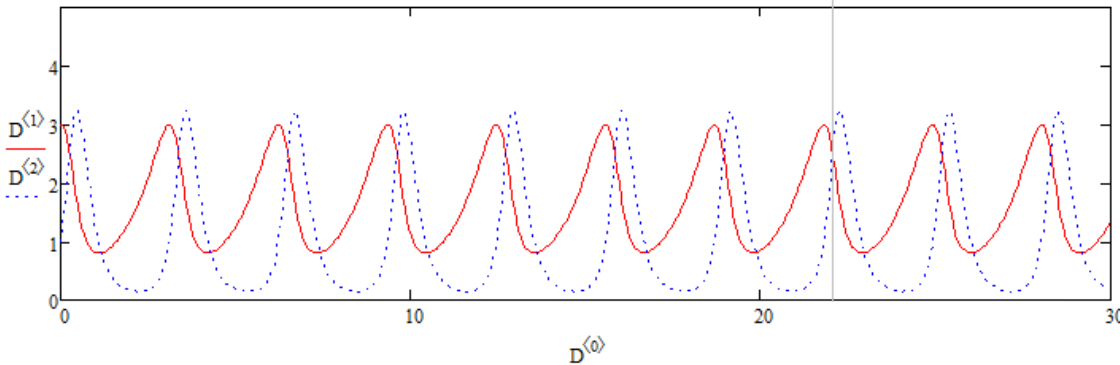
---

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - cy)x, \\ \dot{y} = (-\beta + dx)y, \end{cases}$$

модель Волтерры-Лотки, в которой  $x$  – число жертв,  $y$  – хищников,  $\alpha$  – скорость размножения жертв в отсутствии хищников,  $\beta$  – естественная смертность хищников,  $c$  и  $d$  – коэффициенты, определяющие потребность в пище жертв и хищников.



## 8.3. Моделирование в MathCad (1 из 2)



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F(t, Y) := \begin{bmatrix} (a - c \cdot Y_1) \cdot Y_0 \\ (-b + d \cdot Y_0) \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

$$N := 500$$

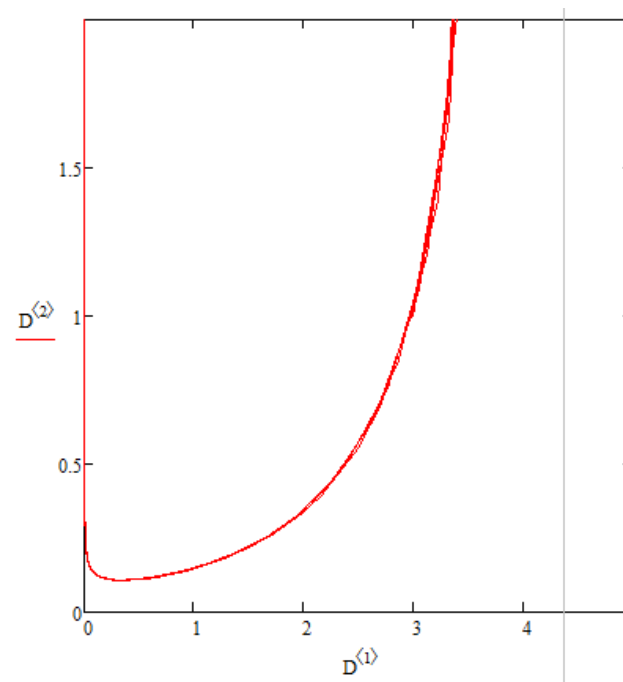
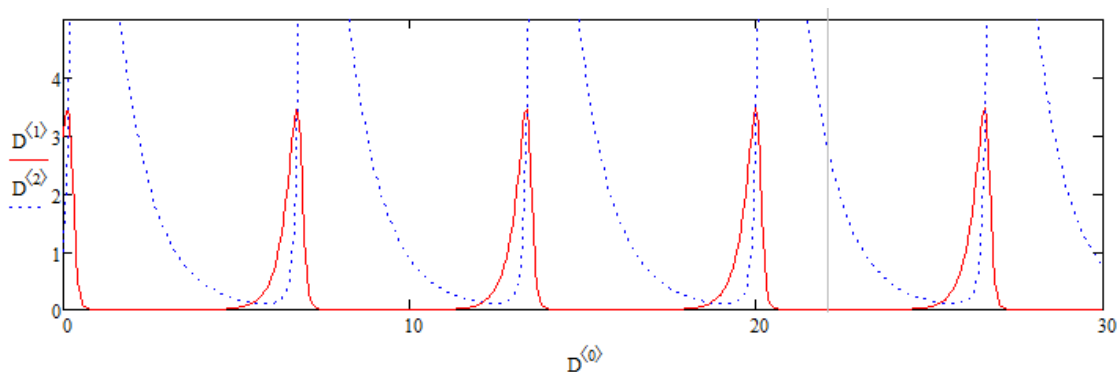
$$ts := 0$$

$$tf := 30$$

$$D := \text{rkfixed} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, ts, tf, N, F \right)$$

Образование стационарной точки вида центр

При высокой смертности хищников, на графике решения виден сопоставимый баланс хищников и жертв



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

+

$$F(t, Y) := \begin{bmatrix} (a - c \cdot Y_1) \cdot Y_0 \\ (-b + d \cdot Y_0) \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

$$N := 500$$

$$ts := 0$$

$$tf := 30$$

$$D := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, ts, tf, N, F \right]$$

Образование стационарной точки вида центр

При низкой смертности хищников, на графике решения видно, что численность хищников превосходит жертв

## 9.1. Система Лоренца

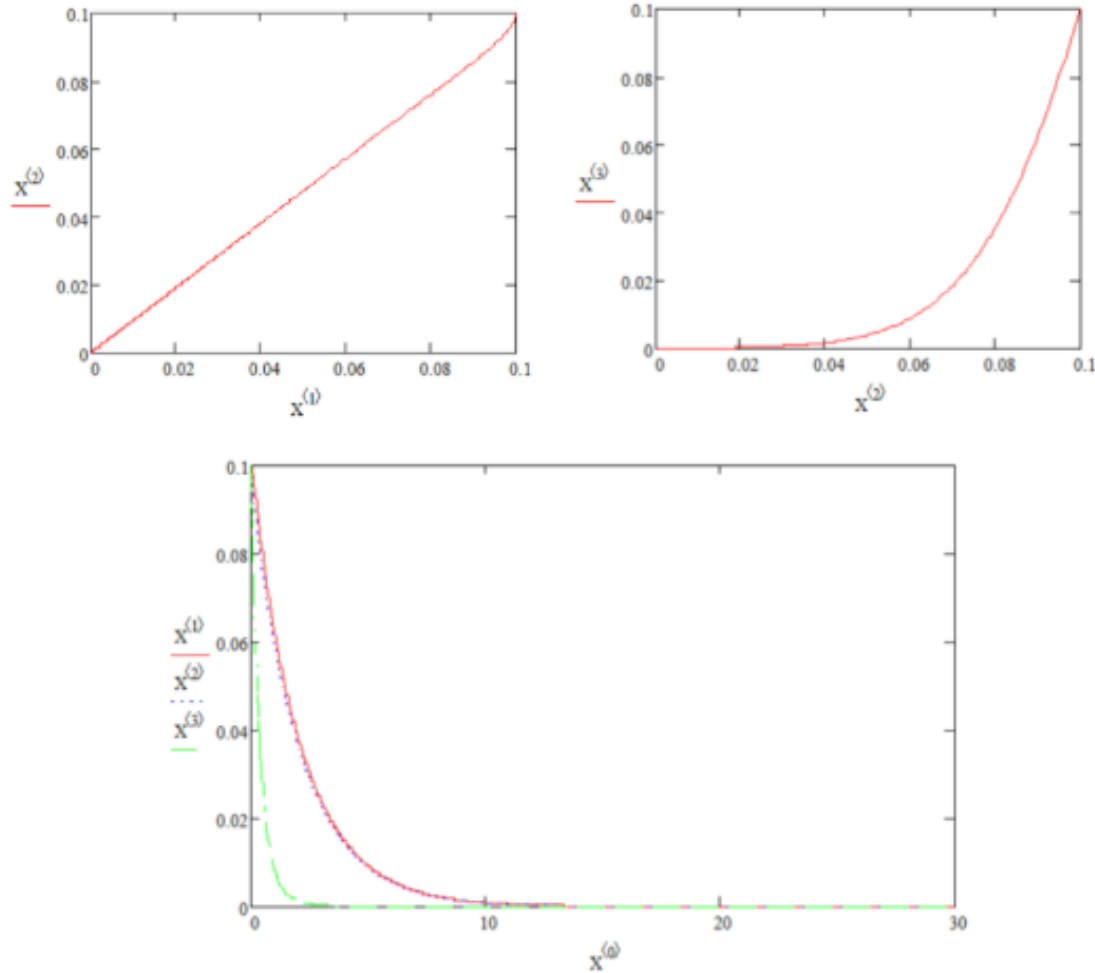
### Система Лоренца

трехмерная система нелинейных дифференциальных уравнений. Исследована Эдвардом Лоренцом в 1963 г. Основной причиной, породившей интерес к системе Лоренца, является ее хаотическое поведение.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

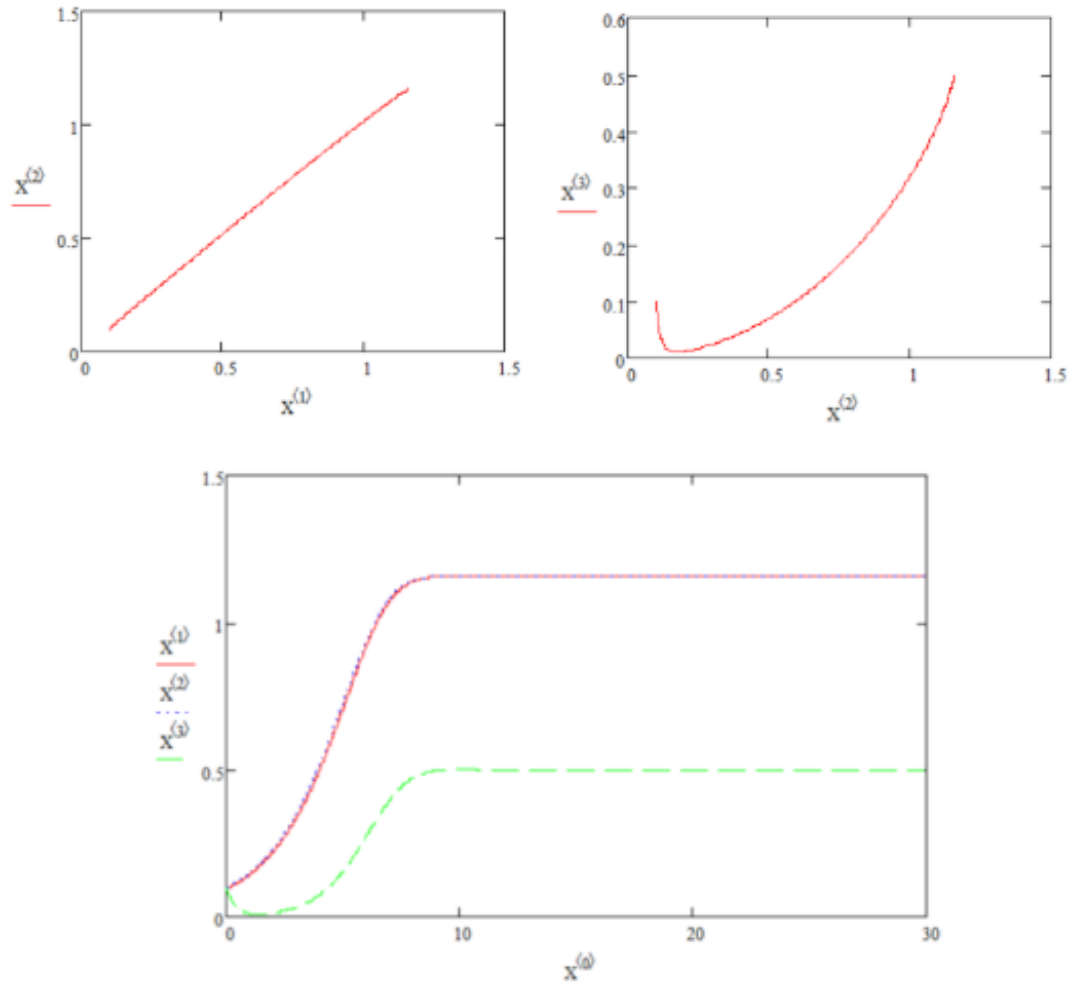
где  $\sigma, r$  и  $b > 0$ , а  $x, y, z$  – параметры, зависящие от  $t$ .

## 9.2. Моделирование в MathCad (1 из 8)



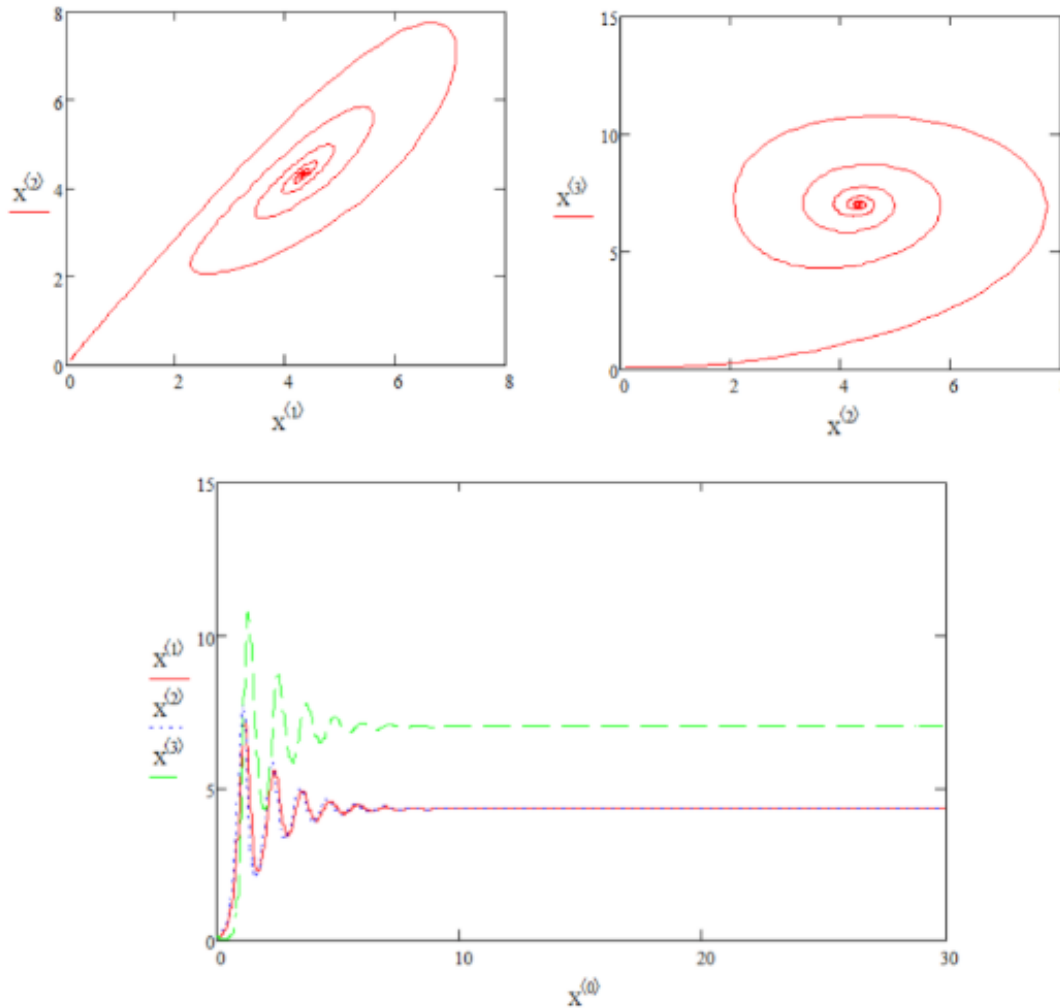
Образование устойчивого узла

## 9.2. Моделирование в MathCad (2 из 8)



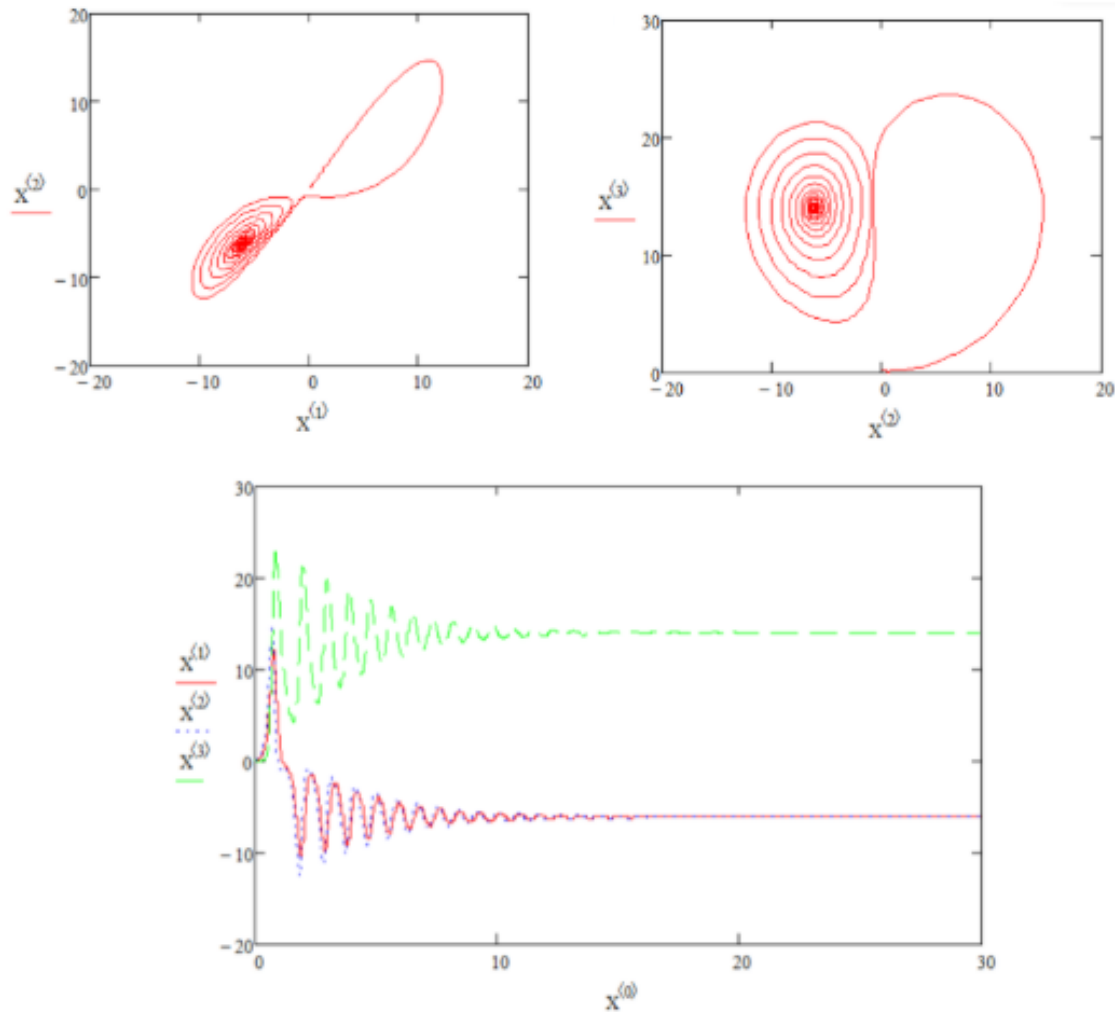
Образование двух устойчивых узлов

## 9.2. Моделирование в MathCad (3 из 8)



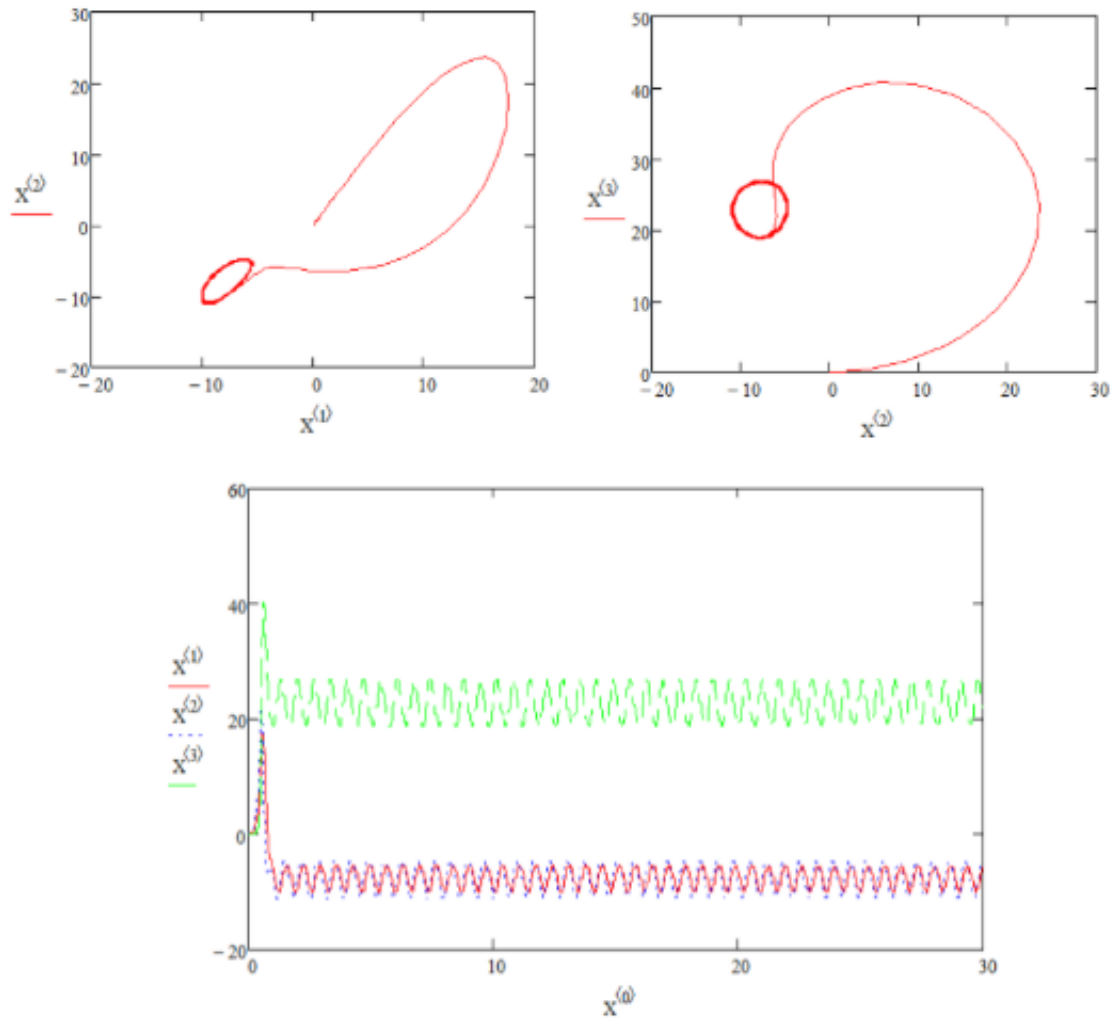
Образование двух устойчивых фокусов

## 9.2. Моделирование в MathCad (4 из 8)



Гомоклиническая петля и два устойчивых фокуса

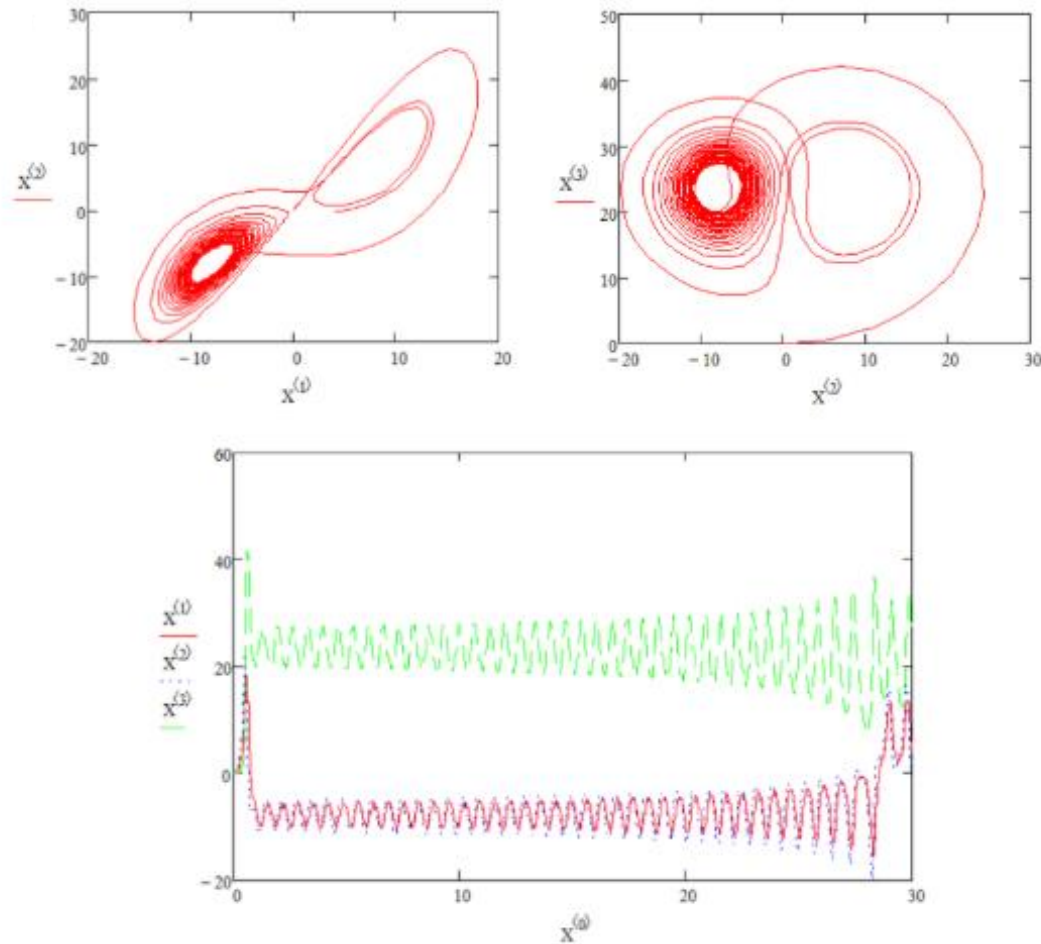
## 9.2. Моделирование в MathCad (5 из 8)



Образование двух неустойчивых предельных цикла

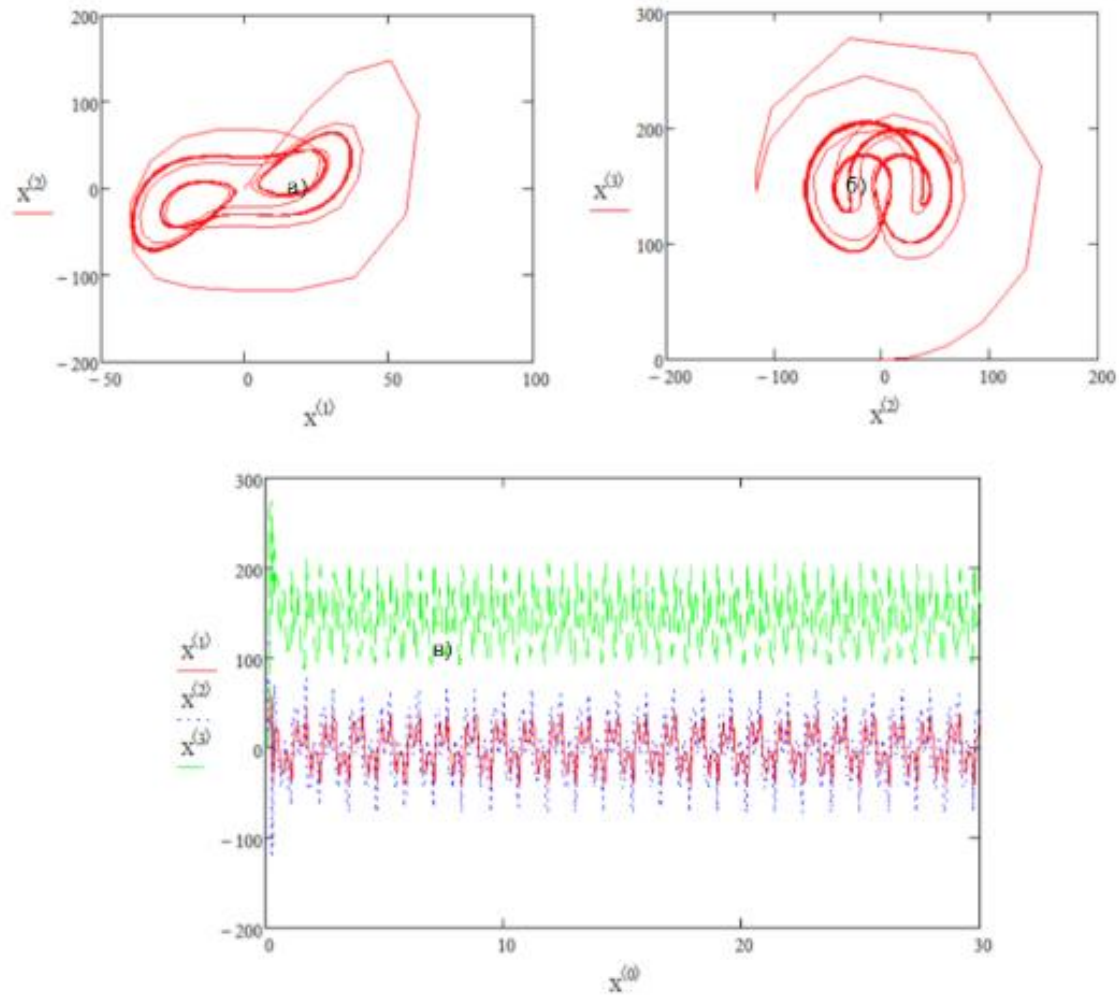


## 9.2. Моделирование в MathCad (6 из 8)



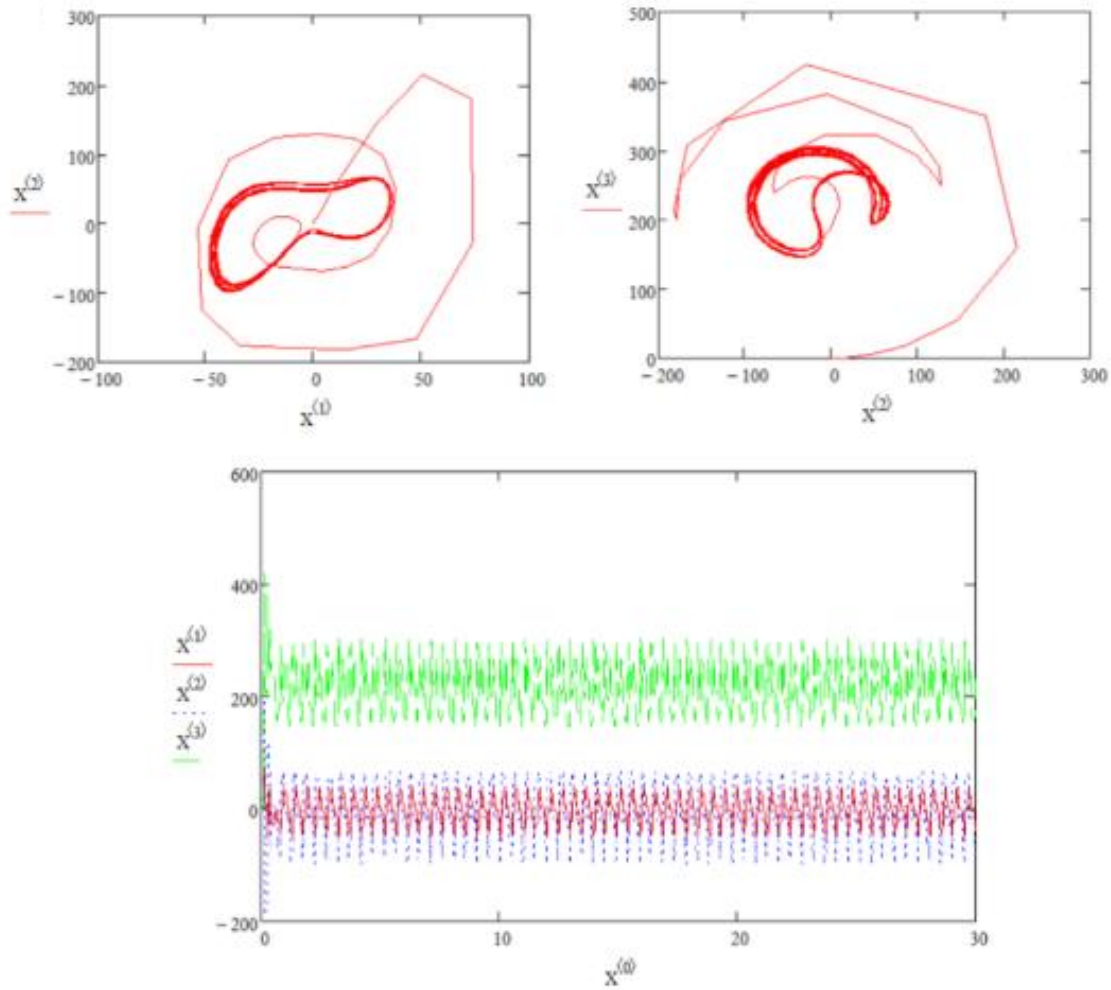
Образование странного аттрактора при следовании фазовых траекторий вблизи предельных циклов

## 9.2. Моделирование в MathCad (7 из 8)



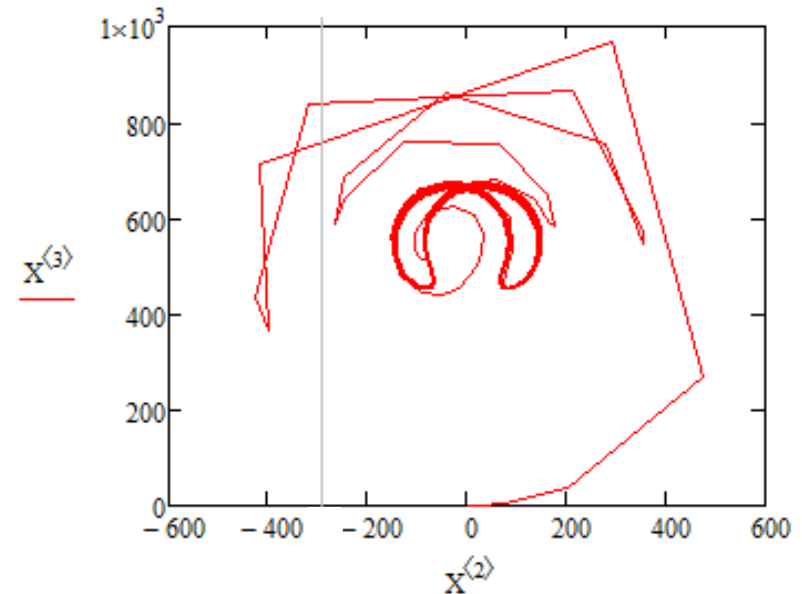
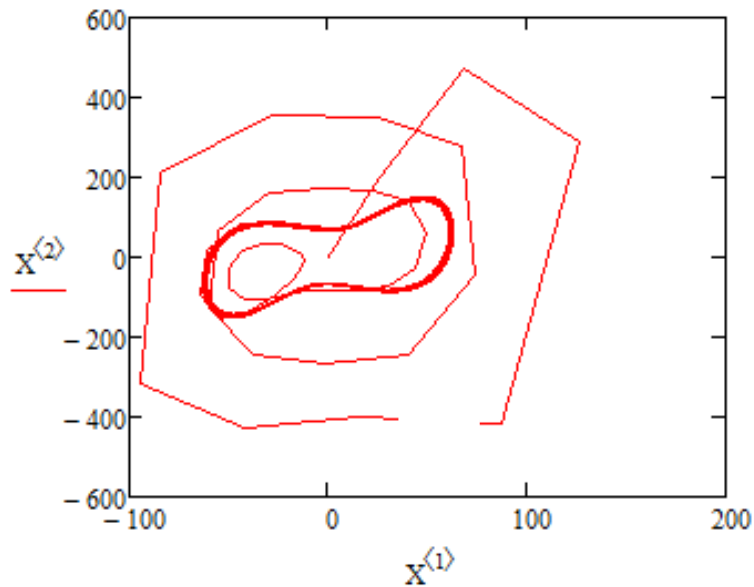
Режим незатухающих колебаний

## 9.2. Моделирование в MathCad (8 из 8)



Удвоение предельного цикла

## 9.3. Пример реализации в MathCad



$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 555 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$F(t, x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{rkfixed}(x, 0, 30, 2001, F)$$

## 10. Список литературы

---

■ Вся высшая математика. ТЗ: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

■ Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

■ Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.